~~M2~~ # PERMUTĂRI N2

1) <u>permutare</u> - are două linii, pe prima sunt numere în ordine crescăt. de la 1 la n, pe cea de-a doua aceleași numere în indeferent ce ordine

<u>Obs</u>.: mț permut de ord n se notează S_n și $card\, S_n = n!$ (nr. de elemente)

<u>Obs</u> 2: $\exists$ permutarea identica

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}$$

2) <u>inversa unei permutări</u> se notează σ^{-1}, pe prima linie elem. în ordine crescăt iar pe cea de-a doua folosim $\sigma(i)=j \Leftrightarrow \sigma^{-1}(j)=i$

3) <u>compunerea (înmulțirea) permut</u> dacă se cere $\sigma_1 \circ \sigma_2$, folosim că $(\sigma_1\circ\sigma_2)(a)=\sigma_1(\sigma_2(a))$, înlocuim $\sigma_2(a)$ cu valoarea corespunzăt, apoi calculăm σ_1 de acea valoare

<u>Obs</u>: o permut NU e comut, e asociat, $\sigma\circ e = e\circ\sigma = \sigma$ și $\sigma\circ\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\circ\sigma = e$

<u>Obs</u>.: la o întotdeauna pornim cu cea de-a doua permutare

4) <u>ec simple cu permutări</u>: se cere x dacă: a) $\sigma_1\circ x = \sigma_2 \,|\, \sigma_1^{-1} \Rightarrow x = \sigma_1^{-1}\circ\sigma_2$

b) $x\circ\sigma_1 = \sigma_2 \,|\circ_d\, \sigma_1^{-1} \Rightarrow x = \sigma_2\circ\sigma_1^{-1}$

5) <u>numărul de inversiuni</u>: se discută pentru fiecare element din linia a doua, câte după el sunt situate invers (descrescător, adică mai mici) și se adună inversiunile pentru fiecare element, se not $m(\sigma)$

<u>Obs</u>.: dacă $m(\sigma)$ impar $\Rightarrow$ <u>perm. impară</u>

dacă $m(\sigma)$ par $\Rightarrow$ <u>perm. pară</u>

6) <u>semnul unei permutări</u>

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$$

<u>Obs</u> 1: $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\cdot\varepsilon(\sigma_2)$

<u>Obs</u> 2: $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$

7) <u>transpoziții</u> - provin din permut identică prin inversarea a două elemente din linia a doua între ele, se notează $\tau_{ij} = (i\ j)$ unde i și j sunt elem care se inversează

<u>Obs</u>: $(i\,j)(i\,j) = e$

$(i\,j)^{-1} = (i\,j)$

$(i\,j) = (j\,i)$

<u>Ex</u> 1: $\sigma_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ e permutare.

$\sigma_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&4&2&1\end{pmatrix}$ nu e permutare

<u>Ex</u> 2: $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

<u>Ex</u> 3: $\sigma_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\sigma_1\circ\sigma_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

$\sigma_2\circ\sigma_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

<u>Ex</u> 4: $\sigma_1 x = \sigma_2$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$

$x = \sigma_1^{-1}\sigma_2$

Ex) $\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

<u>Ex</u> 5: $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&3&1&2\end{pmatrix}$

$m(\sigma) = 3+3+3+2+0 = 11 \Rightarrow \sigma$ perm impară

$\Rightarrow \varepsilon(\sigma) = (-1)^{11} = -1$

<u>Ex</u> 6: în $S_5 \Rightarrow (2;5) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&4&2\end{pmatrix}$

în $S_7 \Rightarrow (1\ 4) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&2&3&1&5&6&7\end{pmatrix}$

CALCULAREA PUTERILOR UNEI MATRICI CU AJUTORUL ȘIRURILOR (N2)

E1) se calculează $A^2, A^3, \dots$ și la elementele la care se observă regula scriem elementele cu acea regula, la celelalte notăm $a_n, b_n, \dots$

E2) avem forma lui A^n cu unele elemente sub formă de șir $a_n, b_n, \dots$ apoi scriem A^{n+1} sub aceeași formă cu unele elemente $a_{n+1}, b_{n+1}, \dots$

E3) calculăm $A^{n+1} = A^n \cdot A$ și egalând corespunzător elementele lui A^{n+1} din cele 2 relații obținem o recurență între șirurile a_n, b_n

E4) deducem forma lui a_n, b_n și deducem A^n, apoi arătăm prin inducție matematică rezultatul obținut

---

Ex 1: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cere $A^n = ?$, $n \geq 1$

E1) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E2) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E3) Obs. că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

cu $a_1 = -5$, $a_2 = -6$, $a_3 = -3$ deci ne intuim forma lui a_n

E4) din $A^n \Rightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) & a_{n+1} \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E5) $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & -5+4n+a_n \\ 0 & 1 & 2n+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E6) egalând corespunzător elementele

$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + 4n - 5, \forall n \geq 1$

$n=1 \Rightarrow \cancel{a_2} = a_1 + 4 \cdot 1 - 5$

$n=2 \Rightarrow \cancel{a_3} = \cancel{a_2} + 4 \cdot 2 - 5$

$- - -$

$n=n-1 \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 4(n-1) - 5$

"+": $a_n = a_1 + 4(1+2+\dots+(n-1)) - 5(n-1)$

$\Rightarrow a_n = \cancel{-5} + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - 5n + \cancel{5}$

$a_n = 2n^2 - 2n - 5n = 2n^2 - 7n$

E7) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2-7n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ind.

I $P(2)$: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ adev.

II P_k. $A^k = (- - -)$, arăt $A^{k+1} = (- - -)$

Din $A^k = (- - -) \,\Big|\cdot A \Rightarrow A^{k+1} = (- - -)A$

și iese din calcul

DETERM. VANDERMONDE (N2)

- dacă nu se reține, se deduce prin formare de zerouri

TIP I: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a$

TIP II: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

TIP III: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

- ca și structură, ∀ determinant VANDERMONDE are pe prima linie 1, apoi variabile la puterea I, apoi aceleași variabile la puterea a 2-a, ...
- ca rezultat, din necunoscuta 2 și scade nec 1, din nec 3 se scade nec 1, ..., apoi din 3 se scade 2, ...

(M2) REZOLVAREA SISTEMELOR ÎN CAZ GENERAL (N2)

E1) dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ regula lui Cramer

(dacă A pătratică cu $\det A = 0$) sau (A nu e pătratică), studiem compatibilitatea sistemului (vezi E2)) și dacă sist e INCOMPATIBIL $\Rightarrow$ STOP, dacă e compatibil continuăm rezolvarea

E2) pt compatibilitate $\Rightarrow$ 2 metode

<u>met I</u>: dacă $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist compatibil

dacă $\text{rang} A \neq \text{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist incompatibil

<u>met II</u>: dacă toți $\Delta_c = 0$ sau $\nexists \Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil

dacă $\exists \Delta_c \neq 0 \Rightarrow$ sist incompatibil

E3) se formează sist principal format din ec. ce intră în Δ_p, necunoscutele care nu intră în Δ_p se trec în dreapta se notează cu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, se numesc nec. secundare

E4) se rezolvă prin orice metodă (reducere, substituție, Cramer) sist. principal obținut

<u>Obs</u>: • <u>sist compat determinat</u> (cu soluție unică) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (se rezolvă cu Cramer)

• <u>sist compat. nedeterminat</u> (sistem cu o inf de soluții) $\Leftrightarrow$ apar parametri $(\alpha, \beta, \ldots)$

• <u>sist simplu nedeterminat</u>, apare $\alpha \Leftrightarrow$ (nr. necun.) − (nr. de linii pt Δ_p) = 1

• <u>sist dublu nedeterminat</u>, apar $\alpha, \beta \Leftrightarrow$ (nr. necun.) − (nr. de linii pt Δ_p) = 2

<u>Ex 1</u>: $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 4x - 2y + 2z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$, rezolvați

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-2+4+2-4-4 = 0 \Rightarrow$ nu putem aplica Cramer

E2) rang A = ?, $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} A \geq 1$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4+4 = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4-4 = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rang} A \geq 2$, bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rang} A = 2$

E3) $\text{rang} \bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, bordăm cu col. term. liberi $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ și e singura modalit de bordare cu col. term liberi $\Rightarrow \text{rang} \bar{A} = 2 \Rightarrow \text{rang} A = \text{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist compatibil

E4) sist pr. este $\begin{cases} 2x - y = 4 - \alpha \\ x + y = 1 + \alpha \end{cases}$ unde $z = \alpha$

E5) adunăm ec $\Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$, înlocuim

$\Rightarrow y = 1 + \alpha - \frac{5}{3} = \alpha - \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 5/3 \\ y = \alpha - 2/3 \\ z = \alpha \end{cases}$

și e simplu nedeterminat

<u>Ex 2</u>: $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 4x + 2y - 2z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4-2+4+2-4-4 = 0$

$\Rightarrow$ nu putem aplica Cramer

E2) rang A = ?, se arată că $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rang} A = 2$

E3) $\text{rang} \bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4+1-8-4+2+4 = -9 \neq 0$

$\Rightarrow \text{rang} \bar{A} = 3 \neq \text{rang} A \Rightarrow$ INCOMPATIBIL

<u>Ex 3</u>: $\begin{cases} 2x - y + z + 3t = 5 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + 4z + 2t = 5 \end{cases}$

E1) A nu e pătratică, nu pot folosi Cramer

E2) rang A = ?, $|2| = 2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang} \geq 2$,

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\nexists$ alt minor obț prin bordare $\Rightarrow \text{rang} A = 2$

E3) $\text{rang} \bar{A} = ?$, bordăm $\Delta_p \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, $\nexists$ altă bordare $\Rightarrow \text{rang} \bar{A} = 2 \Rightarrow$ compatibil

E4) sist pr. $\begin{cases} 2x - y = 5 - \alpha - 3\beta \\ x + y = 1 - 2\alpha \end{cases}$, $z = \alpha$, $t = \beta$

E5) „+”: $3x = 6 - 3\alpha - 3\beta \Rightarrow x = 2 - \alpha - \beta$

$y = 1 - 2\alpha - x = 1 - 2\alpha - 2 + \alpha + \beta = -1 - \alpha + \beta$

E6) $\begin{cases} x = 2 - \alpha - \beta \\ y = -1 - \alpha + \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$ sist compatibil dublu nedeterminat

~~N2~~ SISTEME LINIARE OMOGENE (N2)

– sunt sisteme liniare (toate necunoscutele apar la puterea I) la care coloana termenilor liberi este formată doar din zerouri

Obs1: Un sistem liniar omogen e întotdeauna compatibil deoarece are întotdeauna soluția banală (soluția nulă) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Obs2: Dacă A pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ se poate rezolva cu CRAMER și $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \dots \Rightarrow x = y = z = \dots = 0$

Așadar, pt ca S să aibă doar soluția banală trebuie ca A pătratică cu $\det A \neq 0$

Obs3: Pt ca S să aibă și alte soluții diferite de soluția banală, sau A nu e pătratică sau A pătratică cu $\det A = 0$

Ex: $\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$, se cere $m = ?$ a.î. S are doar soluția nulă

E_1) A pătratică, ar trebui ca $\det A \neq 0$

E_2) $\det A = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + \cancel{3} - 1 - \cancel{3} - m + 2 = m + 1$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$