INTEGRALE NEDEFINITE (N2)

RECURENTE

E_1) notăm integrala inițială I_n, $n \geq \dots$

E_2) calculăm prin părți, separăm $\Rightarrow I_n = \dots$ în funcție de I_{n-1} (recurență de ord I), sau $I_n = \dots$ în funcție de I_{n-2} (recurență de ord II) etc

E_3) la recurențe de ordin I calculăm prima integrală, la cele de ordin II primele două integrale etc

Ex: $I_n = \int \ln^n x \, dx, \quad n \geq 1$

E_1) pentru $I_n = \int \ln^n x \, dx$,

fie $f(x) = \ln^n x \Rightarrow f'(x) = n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

E_2) $I_n = \ln^n x \cdot x - \int n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dx$

$I_n = \ln^n x \cdot x - n \cdot \int \ln^{n-1} x \, dx$

$\Rightarrow I_n = \ln^n x \cdot x - n \cdot I_{n-1}$, recurență de ord I, calculăm I_1

E_3) este recurență

$I_1 = \int \ln x \, dx$

E_1) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

$I_1 = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - x + C$

DESCOMPUNEREA UNEI FUNCȚII RAȚIONALE ÎN FUNCȚII RAȚIONALE SIMPLE (N2)

1) Funcțiile raționale simple sunt: $\frac{A}{(\alpha x+\beta)^n}$ și $\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^n}$ unde $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ constante reale

2) Se cere descompunerea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în funcții raționale simple

E_1) dacă $gr\,P(x) < gr\,Q(x)$, se descompune $Q(x)$ în produse de factori de gr I la oricât de multe ori și factori de gr II la oricât de multe ori

E_2) se descompune $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în sumă de fracții raționale simple după toți numitorii posibili cu condiția ca dacă numitorul are gr I la orice putere, numărătorul e constantă iar dacă numitorul are gr II la orice putere, numărătorul e de gr I

E_3) se aduc acele fracții la același numitor, se egalează coef. pentru aceleași puteri ale lui x, se rezolvă sistemul

E_4) dacă $gr\,P(x) \geq gr\,Q(x)$, se încearcă scrierea numărătorului în funcție de numitor sau împărțim $P(x)$ la $Q(x)$ și folosim „scoaterea întregilor din fracție" adică $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ cu $gr\,R(x) < gr\,Q(x)$

E_5) dacă $\frac{R(x)}{Q(x)}$ nu e fracție rațională simplă, o descompunem cu metoda anterioară

Ex 1: $\frac{3x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} =$

$= \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x(A+B)+3A+B}{(x+1)(x+3)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=3 \\ 3A+B=2 \end{cases}$

„$-$": $-2A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{7}{2}$

$\Rightarrow \frac{3x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{7}{2}}{x+3}$

Ex 2: $\frac{5x^2+x+4}{x^3+6x^2+11x+6}$

E_1) Cu Horner $x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x^2+5x+6)$

E_2) $\frac{5x^2+x+4}{(x+1)(x^2+5x+6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5x+6} =$

$= \frac{A(x^2+5x+6)+(x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2+5x+6)} =$

$= \frac{x^2(A+B)+x(5A+B+C)+6A+C}{(x+1)(x^2+5x+6)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 5A+B+C=1 \\ 6A+C=4 \end{cases}$

Ex 3: $\frac{4x^3+3x^2+5x+1}{(2x+1)^3(x^2+x+1)^2} =$

$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{(2x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$

și aducem la ac. numitor

Ex 4: $\frac{2x^2+7x+4}{x^2+5}$

E_1) $\frac{2x^2+7x+4}{x^2+5} = \frac{2(x^2+5)+7x-6}{x^2+5} =$

$= 2 + \frac{7x-6}{x^2+5}$ și $\frac{7x-6}{x^2+5}$ rad. simplă

Ex 5: $\frac{2x^2+7x+4}{x+3}$

E_1)

$2x^2+7x+4 \;\big|\; x+3$

$-2x^2-6x \quad\quad 2x+1$

$x+4$

$-x-3$

1

E_2) $\frac{2x^2+7x+4}{x+3} = 2x+1+\frac{1}{x+3}$

INTEGRALE TRIGONOMETRICE (N2)

1) dacă apar și ($\sin x$ și $\cos x$), se încearcă notația ($t = \sin x$) sau ($t = \cos x$) a.î. derivata a ceea ce notez să apară la numărător

2) dacă $\sin x$ și/sau $\cos x$ apar la puteri pare, folosim

$\boxed{\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{tg^2 x + 1}}$ și $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{tg^2 x + 1}}$ și notăm $tg\, x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \,/()' \Rightarrow$

$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

3) dacă nu merg metodele anterioare, folosim $\boxed{\sin x = \frac{2 tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}}$ și $\boxed{\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}}$

și $tg \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Obs.: prin aceste metode transformăm integralele trigonometrice în integrale raționale care se rezolvă prin metodele de la integrale raționale

---

Exm 1.: $I = \int \frac{\sin x}{2 + \cos^2 x} dx$

$E_1)$ $t = \cos x \,/()' \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$

$\Rightarrow \sin x\, dx = -dt$

$E_2) I(t) = \int \frac{-dt}{2+t^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$

$E_3) I(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + C$

Exm 2: $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - 3 \sin^2 x} dx$

$E_1)$ $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$

$E_2) I(x) = \int \frac{\frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}}{\frac{1}{1 + tg^2 x} - \frac{3 tg^2 x}{1 + tg^2 x}} dx$

$E_3)$ $t = tg x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \,/()' \Rightarrow$

$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$E_4) I(t) = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} - \frac{3t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

$I(t) = \int \frac{t^2}{1 - 3t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

$I(t) = \int \frac{t^2}{(1-3t^2)(1+t^2)} dt$

$E_5) \frac{t^2}{(1-3t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1-3t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$ și de aici e fgd rațională simplă

Exm 3: $I = \int \frac{1}{3 + \cos x} dx$

$E_1) \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$

$E_2) I = \int \frac{1}{3 + \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}} dx$

$E_3)$ $t = tg \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \,/()' \Rightarrow$

$dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt$

$E_4) I = \int \frac{1}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$

$= \int \frac{1+t^2}{3 + 3t^2 + 1 - t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$

$= \int \frac{2}{4 + 2t^2} dt = \int \frac{1}{t^2 + 2} dt =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$

$E_5) I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tg \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right) + C$

NOTAȚII CLASICE LA CALCULUL PRIMITIVELOR

(N2)

1) <u>apare a^x sau e^x sau e^{-x}</u>, notăm ($t=a^x$) sau ($t=e^x$) sau ($t=e^{-x}$)

2) <u>apar radicali de ordin diferit</u>, găsim cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor și îl notăm cu t radicalul de ordin c.m.m.m.c. găsit anterior

3) <u>apare radical dintr-o expresie</u>, notăm acel radical cu t și vom găsi pe x în funcție de t, apoi derivăm

Obs.: prin aceste metode ajungem la integrale raționale care se rezolvă cu metode specifice

---

Ex 1: $\int \frac{2^{-x}}{3+2^{-x}}\,dx$

E1) $t=2^{-x}\,|\,()' \Rightarrow dt=2^{-x}\ln 2\cdot(-1)dx$

$\Rightarrow 2^{-x}dx=-\frac{dt}{\ln 2}$

E2) $I(t)=\int \frac{\frac{-dt}{\ln 2}}{3+t}=-\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{t+3}=$

$=-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{\ln|t+3|}{1}+C$

E3) $I(x)=-\frac{1}{\ln 2}\ln|2^{-x}+3|+C=$

$=-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^{-x}+3)+C$

Ex 2: $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

E1) c.m.m.m.c. pt (2,3) este 6

E2) $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\,|\,()'\Rightarrow$

$dx=6t^5dt$

E3) $I=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^5dt}{t^2(t+1)}=$

$=6\cdot\int\frac{t^3}{t+1}dt$ care e rațională

Ex 3: $\int\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\,dx$

E1) $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,|\,()^2\Rightarrow t^2=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow$

$t^2x+t^2=x-1\Rightarrow x(t^2-1)=-1-t^2$

$\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{1-t^2}\,|\,()'$ și după calcule

E2) $dx=\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$

E3) $I(t)=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$

care e integrală rațională

~~M2~~ DEFINIȚIA INTEGRABILITĂȚII (N2)

A) noțiuni necesare:

1) diviziune pt $[a,b]$ este o mț de pct $\Delta=(a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b)$

2) diviziune echidistantă: distanța între 2 pct consecutive ale diviziunii e aceeași

3) norma diviziunii: maximul diferenței între 2 pct consecutive, adică $\|\Delta\|=\max(x_i-x_{i-1})$

4) sistem de pct intermediare $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$

5) suma Riemann asociată f, diviziunii Δ și sist de pct intermed ξ_k

$$S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

B) f integrabilă Riemann (sau pe scurt f integrabilă) pe $[a,b]\Leftrightarrow$ $\forall\Delta$ diviziune pt $[a,b]$ cu $\|\Delta\|\to 0$ și $\forall\xi_k$ sist de pct intermediare $\Rightarrow\exists\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_f\in\mathbb{R}$ și în acest caz notăm $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_f$

C) aplicații practice:

dacă f pozitivă $\Rightarrow\int_a^b f(x)dx$ este aria subgraficului lui f, iar în caz general, aria subgraficului lui f este $\int_a^b|f(x)|dx$

Ex 1: pt $[1;3]\Rightarrow$

$\Delta_1=(1<1,2<1,9<3)$ e diviziune

$\Delta_2=(1<1,3<2,9)$ nu e diviziune

Ex 2: pt $[1;3]\Rightarrow$ diviziunea:

$\Delta_1=(1<1,5<2<2,5<3)$ e echidistantă

$\Delta_2=(1<2<2,5<3)$ nu e echidistantă

Ex 3: pt $\Delta=(2<2,9<3)\Rightarrow$

$\xi_1=(2,8;\ 2,91)$ e sist de pct interm

$\xi_2=(2,9;\ 2,93)$ e sist de pct interm

$\xi_3=(2,4;\ 2,8)$ nu e sist de pct interm

Ex 4: pt $f:[1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$, pt $\Delta=(1<1,8<2,4<3)$ și $\xi_k=(1;\ 2;\ 2,5)$

$$\Rightarrow S_f=\sum_{k=1}^{3} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=$$

$$=f(1)(1,8-1)+f(2)(2,4-1,8)+f(2,5)(3-2,4)=$$

$$=3\cdot 0,8+5\cdot 0,6+6\cdot 0,6=9$$

Ex 5: Fie $f:[1;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3$. Arătați că f integrabilă pe $[1;5]$

E_1) $\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k$ sist de pct interm

$$S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} 3(x_k-x_{k-1})=$$

$$=3(x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1})=$$

$$=3(x_n-x_0)=3(5-1)=12\to 12\in\mathbb{R}$$

$E_2)\Rightarrow\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k$ sist de pct interm

$\Rightarrow S_f\to 12\Rightarrow$ f integrabilă pe $[1;5]$ și $\int_1^5 f(x)dx=12$

Ex 6: $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Studiați dacă f integrab pe $[0;1]$

E_1) $\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k\in\mathbb{Q}$ sist pct interm

$$\Rightarrow S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} 1(x_k-x_{k-1})=$$

$$=\dots=1-0=1\to 1$$

$E_2)$ $\forall\Delta$ cu $\|\Delta\|\to 0$, $\forall\xi_k'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sist pct interm

$$\Rightarrow S_f=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')(x_k-x_{k-1})=\sum 0(x_k-x_{k-1})=0$$

$\Rightarrow\nexists\lim S_f\Rightarrow f$ nu e integr pe $[0;1]$

INTEGRALĂ DIN FUNCȚIA INVERSĂ

Se cere $\int_a^b f^{-1}(x)\,dx$

E_1) not $f^{-1}(x) = t \Leftrightarrow x = f(t)\,|\,()'$

$\Rightarrow dx = f'(t)\,dt$

E_2) schimb capetele:

$x = a \Rightarrow f(t) = a$, obs. că $t = t_1$ soluție, f biject $\Rightarrow t = t_1$ soluție unică

$x = b \Rightarrow f(t) = b$, obs. că $t = t_2$ soluție, f biject $\Rightarrow t = t_2$ soluție unică

E_3) Se obține o integrală care se rezolvă

Ex: $f(x) = x + \ln x$, se cere

$\int_1^{1+e} x f^{-1}(x)\,dx$

E_1) $f^{-1}(x) = t \Leftrightarrow x = f(t)\,|\,()' \Rightarrow dx = f'(t)dt$

E_2) $x = 1 \Rightarrow f(t) = 1 \Rightarrow t + \ln t = 1 \Rightarrow t = 1$ sol. unică

Obs. că $t = 1$ soluție, f biject

Arelos, $x = 1+e \Rightarrow t + \ln t = 1 + e \Rightarrow t = e$

$\Rightarrow \int_1^e (t+\ln t)\cdot t \cdot (1+\frac{1}{t})\,f'(t)\,dt = \int_1^e$

CALCULAREA LIMITELOR DE ȘIRURI CU AJUTORUL INTEGRALELOR

(M2) (N2)

E_1) se scrie suma ca sumă de termen general

E_2) se dă factor comun la termenul general a.î. să obținem ca și argument al sumei pe $\frac{k}{n}$ și să putem da factor la sumă pe $\frac{1}{n}$ (nu are voie să apară la termenul general nici k izolat, nici n izolat ci grupat $\frac{k}{n}$)

E_3) se consideră $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)$ egal cu termenul general al sumei unde notăm $\frac{k}{n}=x$

E_4) fie Δ diviziune pt $[0;1]$ sub forma $\Delta=(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n}{n})$ cu $\|\Delta\|=\frac{1}{n}\to 0$ și $\xi_k=\frac{k}{n}$ sistem de puncte intermediare

E_5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\int_0^1 f(x)\,dx$, integrală care se calculează

Obs.: se poate folosi direct că $\lim\limits_n \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\dots+f(\frac{n}{n})\right)=\int_0^1 f(x)dx$ de unde deducem că $\lim\limits_n \frac{1}{n}\left(f'(\frac{1}{n})+f'(\frac{2}{n})+\dots+f'(\frac{n}{n})\right)=\int_0^1 f'(x)dx=$
$=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)$

Exemplu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$

E_1) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$

$=\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$

E_3) Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

E_3) Fie $\Delta=(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n}{n})$ o diviziune pt $[0;1]$ cu $\|\Delta\|=\frac{1}{n}\to 0$ și ξ_k sistem de puncte intermediare

E_4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=$

$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=$

$=\ln(1+\sqrt{2})-\ln 1=\ln(1+\sqrt{2})$

PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALELOR DEFINITE ($a<b$) (N2)

1) $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

2) a) $f(x)<g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$

b) $f(x)\le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

c) $f(x)\le g(x)$ și $\exists$ interval $\subset[a,b]$ pe care $f(x)<g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$

3) a) $f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

b) $f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

c) $f(x)\ge 0$ și $\exists$ interval $\subset[a,b]$ pe care $f(x)>0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$

(analog pentru $f(x)<0$ sau $f(x)\le 0$)

4) $m\le f(x)\le M \Rightarrow m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

$m<f(x)<M \Rightarrow m(b-a)<\int_a^b f(x)\,dx<M(b-a)$

5) $[c,d]\subset[a,b]$ și f pozitivă $\Rightarrow \int_c^d f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$

6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ cu c nu neapărat între a și b

7) $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

8) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

9) f pară $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

f impară $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Exm 1: $\int_2^3 (2x-1)\,dx = 2\int_2^3 x\,dx - \int_2^3 1\,dx =$

$= 2\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 - x\Big|_2^3 = (9-4)-(3-2) = 4$

Exm 2: dacă $\ln(1+x)\le x$ și $\ln(1+x)=x$ doar pt $x=0$, să se arate că $\int_0^2 f(x)\,dx < 2$

E_1) $\ln(1+x)\le x$ pe $[0;2]$ și $\exists [1;2]\subset[0;2]$ cu $\ln(1+x)<x \Rightarrow \int_0^2 \ln(1+x)\,dx < \int_0^2 x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow I < \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \Rightarrow I<2$

Exm 3: să se arate că $\int_1^2 e^{-x^2}\,dx > 0$

E_1) cum $a^x>0$, $\forall a>0$ și $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$e^{-x^2}>0 \mid \int_1^2 \cdots dx \Rightarrow \int_1^2 e^{-x^2}\,dx > \int_1^2 0\,dx$

$\Rightarrow I>0$

Exm 4: $f:[1;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+2$, să se arate $16\le \int_1^5 f(x)\,dx \le 528$

E_1) calculăm m și M, pt extrem

$f'(x)=3x^2+1$, $f'(x)=0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ ↗

E_2)

x	1		5
f'		$+$ $+$ $+$	
f	4	↗	132

$f(1)=4$; $f(5)=125+5+2=132$

E_3) $4\le f(x)\le 132 \mid \int_1^5 \cdots dx$

$\Rightarrow \int_1^5 4\,dx \le I \le \int_1^5 132\,dx \Rightarrow$

$4(5-1)\le I\le 132(5-1) \Rightarrow 16\le I\le 528$

Exm 5: calculați $\int_{-8}^{8} \frac{x^5\cdot\cos x}{x^2+1}\,dx$

E_1) $f:[-8;8]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^5\cdot\cos x}{x^2+1}$

E_2) D_f simetric, $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f$ impară

$\Rightarrow I=0$

(N2) TEOREMA DE MEDIE (N2)

$f:[a;b]\to\mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]\Rightarrow$

$\exists c\in(a;b)$ a.î. $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

Obs: valoarea lui $f(c)$ se numește valoarea medie a integralei și este egală cu

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Exp: $f:[1;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$, arătați că $\exists c\in(1;5)$ pentru care $\int_1^5(x^2+1)dx=4c^2+4$.

E1) $f:[1;5]\to\mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow\exists c\in(1;5)$ a.î.

$$\int_1^5 f(x)dx=f(c)(5-1)$$

E2) $\int_1^5(x^2+1)dx=(x^2+1)\cdot 4$ oder.

E3) valoarea medie a integralei este

$$\frac{\int_1^5(x^2+1)dx}{5-1}=\frac{\frac{x^3}{3}\Big|_1^5+x\Big|_1^5}{4}=\frac{\frac{125-1}{3}+(5-1)}{4}$$

DERIVAREA INTEGRALELOR DEFINITE

TIP I: $\boxed{\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)}$

dar formula se poate aplica doar dacă jos este un număr și sus este x

TIP II $\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)'$, în acest caz avem etapele

E1) f cont $\Rightarrow f$ admite primit, fie F o primit a sa $\Rightarrow (F'(x)=f(x))$

$\Rightarrow$ admite primit, fie $F(x)$ o primitivă a sa $\Rightarrow F'(x)=f(x)$

E2) $\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)' = \left(F(t)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\right)' =$

$= (F(\varphi_2(x)) - F(\varphi_1(x)))' =$

$= F'(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - F'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$

Obs.: se poate reține direct (dar eu nu prefer asta) că

$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)' = F'(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - F'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$

Exemplu 1: $\left(\int_2^x e^{\cos t}dt\right)' = e^{\cos x}$

deoarece jos este 2, sus e x

Exemplu 2: $\left(\int_x^3 e^{\cos t}dt\right)'$ nu putem aplica direct formula dar

$\left(\int_x^3 e^{\cos t}dt\right)' = \left(-\int_3^x e^{\cos t}dt\right)' =$

$= -e^{\cos x}$

Exemplu 3: $\left(\int_{x^2+1}^{2x^3+5} e^{\cos t}dt\right)' = ?$

E1) Fie $f:[x^2+1, 2x^3+5] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\cos t}$ cont pe $[x^2+1, 2x^3+5]$

E2) $\left(\int_{x^2+1}^{2x^3+5} e^{\cos t}dt\right)' = \left(F(t)\Big|_{x^2+1}^{2x^3+5}\right)' =$

$= F'(2x^3+5)(2x^3+5)' - F'(x^2+1)(x^2+1)' =$

$= f(2x^3+5)\cdot 6x^2 - f(x^2+1)\cdot 2x =$

$= e^{\cos(2x^3+5)}\cdot 6x^2 - e^{\cos(x^2+1)}\cdot 2x$