PROPRIETĂȚI ALE MATRICILOR VALABILE ÎN CAZ GENERAL CARE SE POT TRANSMITE (N2)

1) <u>adunarea matricilor</u> este asociativă, comutativă, are el. neutru matricea nulă (formată doar din zerouri) și orice element e simetrizabil, simetricul lui A fiind $-A$ rezultă că și pe mulțimea noastră va fi asociativă, comutativă însă el neutru va fi matricea nulă <u>doar</u> dacă matricea nulă este în mț noastră, la fel simetricul va fi $-A$ doar dacă $-A$ este în mulțimea noastră, altfel trebuie calculate cu definiția

2) <u>înmulțirea matricilor</u> e asociat în cz general, NU e comut în cz general, are pe I_n el neutru (doar pt matrici pătratice) și simetricul lui A este $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$ rezultă că e asociat și pe mț noastră, poate fi comut pe mț noastră, are pe I_n el neutru doar dacă I_n este în mț noastră și are pe A^{-1} simetric doar dacă A^{-1} e în mț noastră, altfel folosim definiția pt a găsi el neutru și simetricul

Obs.: deși înmulțirea NU e comut în cz general, ea poate fi comut în cazul nostru, folosim definiția pt a studia

---

Ex.: Fie $M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
Studiați propr. înmulțirii pe M

E_1) deoarece înm matr e asociat în cz general $\Rightarrow$ e asociat pe M

E_2) deoarece „matr nu e comutat în cz general, studiem cu definiție:
$\forall X, Y \in M \Rightarrow X \cdot Y = Y \cdot X$
$X \cdot Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ gata
$Y \cdot X = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E_3) deoarece „matr are pe I_2 el neutru pe $M_2(\mathbb{R})$ și $M \subset M_2(\mathbb{R})$, cum $I_2 \in M$ ($\forall x = 1$) $\Rightarrow$ înm are pe I_2 el neutru pe M

E_4) deoarece „ are pe A^{-1} simetric în ... trebuie să studiem dacă $A^{-1} \in M$, pt asta det $X = x$ și cond det $x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow$ nu toate matricile admit inversa, necunoscută A^{-1}
Studiem cu definiția:
$\forall X \in M, \exists X' \in M$ cu $X \cdot X' = X' \cdot X = I_2$
$X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $XX' = I_2$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} xx' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow xx' = 1$
$\forall x \neq 0 \rightarrow x' = \frac{1}{x}$, $\forall x = 0 \Rightarrow \nexists x'$
Așadar, $\forall x \neq 0 \Rightarrow$ matricea X are simetric $X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

FOLOSIREA ELEMENTULUI GENERIC PENTRU A DEMONSTRA PROPR. ALE OPERAȚIILOR CU MATRICI (N2)

E_1) se scrie matricea X care depinde de a sub forma $X(a)$

E_2) se deduce $X(a)+X(b)$ sau $X(a)\cdot X(b)$ (din lege internă)

E_3) se aplică definițiile și se lucrează cu relația descoperită la E_2)

Exemplu: Fie $M=\{X(a)=I_2+aA \mid a\neq -1\}$ unde $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, să se arate că "$\cdot$" este lege internă pe M și $(M,\cdot)$ parte stabilă (?)

E_1) $(M,\cdot)$ parte stabilă (?)

$\forall X(a), X(b)\in M \overset{(?)}{\Rightarrow} X(a)X(b)\in M$

$X(a)X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=$

$=I_2+(a+b)A+abA^2$

Dar, $A^2=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=A$

$\Rightarrow X(a)X(b)=I_2+(a+b+ab)A$

$\Rightarrow X(a)X(b)=X(a+b+ab)$

E_2) Dar, $a\neq -1$, $b\neq -1$, ar trebui arătat că $a+b+ab\neq -1$

(R.A.) Pp. $a+b+ab=-1\Rightarrow$

$a+b+ab+1=0\Rightarrow a(1+b)+(b+1)=0$

$\Rightarrow (a+1)(b+1)=0\Rightarrow$ $a=-1$ K.O. sau $b=-1$ K.O.

$\Rightarrow a+b+ab\neq -1$

E_3) asociat: $\forall X(a), X(b), X(c)\in M$

$\overset{(?)}{\Rightarrow}(X(a)X(b))X(c)=X(a)(X(b)X(c))$

$(X(a)X(b))X(c)=X(a+b+ab)X(c)=$

$=X(a+b+ab+c+ac+bc+abc)$

$X(a)(X(b)X(c))=X(a)X(b+c+bc)=$

$=X(a+b+c+bc+ab+ac+abc)\Rightarrow$ egalit

$\Rightarrow$ "$\cdot$" asociat pe M

E_3) comut: $\forall X(a), X(b)\in M \overset{(?)}{\Rightarrow}$

$X(a)X(b)=X(b)X(a)$

$X(a)X(b)=X(a+b+ab)$, analog.

$X(b)X(a)=X(b+a+ba)\Rightarrow$ comut.

E_4) el neutru: $\exists X(e)\in M$ a.î. $\forall X(a)\in M$

$\Rightarrow X(a)X(e)=X(e)X(a)=X(a)$

$X(a)X(e)=X(a)\Rightarrow X(a+e+ae)=X(a)$

$\Rightarrow a+e+ae=a\Rightarrow e(a+1)=0$ și cum $a\neq -1\Rightarrow e=0\neq -1$, ok.

Cum "$\cdot$" comut pe $M\Rightarrow X(0)$ el neutru pe M

E_5) toate el. simetrizabile:

$\forall X(a)\in M, \exists X(a')\in M$ cu

$X(a)X(a')=X(a')X(a)=X(e)$

Dar $X(a)X(a')=X(e)\Rightarrow$

$X(a+a'+aa')=X(0)\Rightarrow a+a'+aa'=0$

$\Rightarrow a'(1+a)=-a$ și cum $a\neq -1$

$\Rightarrow a'=-\frac{a}{1+a}$. Rămâne să arăt că $a'\neq -1$, (R.A.) Pp $a'=-1$

$\Rightarrow -a=-1-a$ contr $\Rightarrow a'\neq -1$

Cum "$\cdot$" comut pe $M\Rightarrow$ simetricul lui elem $X(a)$ este $X(-\frac{a}{1+a})$

TABLA UNEI LEGI. PROPRIETĂȚI (N2)

DEDUSE DIN TABLĂ

1) tabla unei legi are forma

$*$	a_1	a_2	...	a_n
a_1				
a_2				
⋮				
a_n				

$\Rightarrow y$

* Obs 1: tabla există doar pt mț finite

2) $*$ internă $\Leftrightarrow$ în tablă nu apar el noi

3) $*$ asociativă NU SE POATE din tablă

4) $*$ comutativă $\Leftrightarrow$ elem. sunt simetrice față de diag pp

5) $*$ are el neutru $\Leftrightarrow$ există o linie și coloana corespunzăt. care lasă neschimbate el. mulțimii

6) un element e simetrizabil $\Leftrightarrow$ pe linia și pe coloana lui apare el neutru situat simetric față de diag principală

7) toate elem. sunt simetrizabile $\Leftrightarrow$ pe linia fiecărui element și pe coloana corespunz apare el neutru situat simetric față de diag pp.

Exp 1: Fie $x*y=\sqrt[3]{x\cdot y}$ și $M=\{-1;0;1\}$. Alcătuiți tabla legii și verificați proprietățile legii din tablă

E1)

$*$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

E_2) deoarece în tablă nu apar el noi $\Rightarrow$ $*$ lege internă pe M

E_3) deoarece toate elem sunt simetrice față de diag pp $\Rightarrow$ $*$ comutativă

E_4) deoarece linia și coloana corespunzătoare elem. 1 lasă neschimbate elem. mulțimii $\Rightarrow$ $\Rightarrow e=1$ el neutru

E_5) deoarece pe linia lui -1 există elem neutru $e=1$ situat chiar pe diag pp (deci simetric față de diag pp) $\Rightarrow -1$ este simetrizabil și simetricul său este tot -1

- deoarece pe linia lui 0 nu există el neutru $\Rightarrow$ 0 nu are simetric
- analog, pe linia și coloana lui 1 există el neutru $e=1$ simetric față de diag pp $\Rightarrow$ 1 este simetrizabil și simetricul său este tot 1

E_6) cum 0 nu e simetrizabil $\Rightarrow$ NU TOATE el. sunt simetrizabile

PROPRIETĂȚI ÎN MONOIZI ȘI GRUPURI

1) $(\mathbb{Z}_n, +)$ grup abelian cu $e = \hat{0}$ și toate elem. sunt simetrizabile pt. că $\hat{k}' = -\hat{k} = \widehat{n-k}$

2) $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoid comutativ cu $e = \hat{1}$ și NU toate elem. sunt simetrizabile. Vor fi simetrizabile doar cele prime cu n (nu au divizori comuni cu n decât pe 1). Mulțimea elem. simetrizabile se notează cu $U(\mathbb{Z}_n)$

3) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ grup comutativ $\Leftrightarrow n$ este număr prim

4) ordinul unui element: cel mai mic $n \in \mathbb{N}^*$ a. î.
$\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = e$

Obs1: dacă $\nexists n \Rightarrow \text{ord } x = \infty$

Obs2: dacă G grup finit cu n elem $\Rightarrow \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = e$, dar ordinul poate fi mai mic decât n

5) ordinul unui grup - este nr. de elemente din grupul respectiv

Obs.: dacă G are o infinit de elemente $\Rightarrow \text{ord } G = \infty$

6) ordinul oricărui subgrup divide ordinul grupului

Ex1: în $(\mathbb{Z}_5, +)$, $\hat{3}' = -\hat{3} = \hat{5} - \hat{3} = \hat{2}$

Ex2: în $\mathbb{Z}_{12} \Rightarrow U(\mathbb{Z}_{12}, \cdot) = \{\hat{1}; \hat{5}; \hat{7}; \hat{11}\}$

Ex3: $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ grup pt că 7 nr prim

$(\mathbb{Z}_6^*, \cdot)$ NU e grup pt că 6 nu e prim

Ex4: în $(\mathbb{Z}_6, +)$, se cere $\text{ord } \hat{2} = ?$

E1) $e = \hat{0}$, $\hat{2} \neq \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 1$
$\hat{2} + \hat{2} = \hat{4} \neq \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 2$
$\hat{2} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{6} = \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} = 3$

Ex5 în $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$, $\text{ord } \hat{2} = ?$
$e = \hat{1}$, $\hat{2} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 1$
$\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 2$
$\hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{8} = \hat{2} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 3$
$\hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{16} = \hat{4} \neq \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} > 4$
obs. că $\hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \dots \cdot \hat{2} \in \{\hat{2}; \hat{4}\} \Rightarrow$ niciodată nu e $\hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{2} = \infty$

Ex6: în $(\mathbb{Z}_6, +)$, evident $\hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{12} = \hat{0}$ și totuși $\text{ord } \hat{2} = 3$

Ex7: $\text{ord}(\mathbb{Z}_6, +) = 6$
$\text{ord}(\mathbb{Z}, +) = \infty$

DISTRIBUTIVITATEA O FAȚĂ (N2) DE *

- o distributivă la stânga față de $* \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M$ avem
  $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$
- o distributivă la dreapta față de $* \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M$ avem
  $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$
- o distributivă față de $* \Leftrightarrow$ o distrib la stg și la dreapta

Ex: Stabiliți dacă o distrib față de * unde
$x * y = x + y + 1$ și $x \circ y = x + y + xy$

E_1) Studiem dacă o distrib. la stg față de $* \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M$ avem:

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

E_2) $x \circ (y * z) = x \circ (y + z + 1) = x + (y + z + 1) + x(y + z + 1) =$

$= x + y + z + 1 + xy + xz + x$ (1)

E_3) $(x \circ y) * (x \circ z) = (x + y + xy) * (x + z + xz) =$

$= (x + y + xy) + (x + z + xz) + 1$

$= 2x + y + z + xy + xz + 1$ (2)

Din (1) + (2) $\Rightarrow$ o nu e distrib la stg față de *

INELE

$(A, *, \circ)$ inel $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (A, *) \text{ grup abelian} \\ (A, \circ) \text{ monoid} \\ \circ \text{ distributivă față de } * \end{cases}$

Obs.: întotdeauna a 2-a lege e distributivă față de prima lege

---

Dacă $(A, *, \circ)$ inel $\Rightarrow (M, *, \circ)$ subinel $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} (M, *) \text{ subgrup al } (A, *) \\ (M, \circ) \text{ submonoid al } (A, \circ) \end{cases}$

adică $\begin{cases} \forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M \\ \forall x \in M \Rightarrow x'_* \in M \end{cases}$ de la subgrup

și $\begin{cases} \forall x, y \in M \Rightarrow x \circ y \in M \\ e_\circ \in M \end{cases}$ de la submonoid

---

Obs.: Dacă $(A, *, \circ)$ inel $\Rightarrow$ în raport cu $*$, toate elementele sunt simetrizabile (deoarece $(A, *)$ grup) iar în raport cu $\circ$ nu sunt toate simetrizabile

Elementele simetrizabile în raport cu $\circ$ se numesc elementele simetrizabile ale inelului și se notează

$U((A, *, \circ))$

INEL FĂRĂ DIVIZORI AI LUI ZERO

Dacă $(A, *, o)$ inel, spunem că el nu are divizori ai lui zero dacă din $x \circ y = e_*$ avem $x = e_*$ sau $y = e_*$

Dacă $(A, *, o)$ inel, spunem că el are divizori ai lui zero dacă $\exists\, x \neq e_*$, $y \neq e_*$ a.î. $x * y = e_*$

Exp: $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ inel, Studiați dacă are sau nu are divizori ai lui zero

$e_* = e_+$ adică $\hat{0}$

Deoarece $\exists\, \hat{2} \neq \hat{0}$, $\hat{3} \neq \hat{0}$ a.î. $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow$ inelul are divizori ai lui zero

---

Exp 2: Fie inelul $(\mathbb{Z}, *, o)$ a.î. $x * y = x + y + 2$, și $e_* = -2$

$x \circ y = xy + 2(x+y) + 2$. Studiați dacă inelul are sau nu are divizori ai lui zero

---

E1) $x \circ y = e_* \Leftrightarrow xy + 2(x+y) + 2 = -2 \Leftrightarrow xy + 2x + 2y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x(y+2) + 2(y+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 0$

E2) $\Rightarrow$ $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x = e_*$ sau $y+2 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow y = e_*$. $\Rightarrow (\mathbb{Z}, *, o)$ nu are divizori ai lui zero

Obs: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este fără divizori ai lui zero $\Leftrightarrow n$ nr. prim

Obs 2: În $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, elementele care nu sunt divizori

CORP

$(K, *, \circ)$ corp $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (K, *) \text{ grup abelian} \\ (K \setminus \{e_*\}, \circ) \text{ grup} \\ \circ \text{ distrib față de } * \end{cases}$

Obs.: Dacă $\circ$ comutativă $\Rightarrow (K, *, \circ)$ corp abelian (comutativ)

Obs2: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ corp $\Leftrightarrow n$ nr. prim

---

Dacă $(K, *, \circ)$ corp $\Rightarrow (M, *, \circ)$ subcorp

$\Leftrightarrow (M, *)$ subgrup al $(K, *)$

$(M, \circ)$ subgrup al $(K, \circ)$ (aici fără e_*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, y \in M \Rightarrow x * y \in M \\ \forall x \in M \Rightarrow x'_* \in M \\ \forall x, y \in M \setminus \{e_*\} \Rightarrow x \circ y \in M \setminus \{e_*\} \\ \forall x \in M \setminus \{e_*\} \Rightarrow x'_\circ \in M \setminus \{e_*\} \end{cases}$

MORFISME, IZOMORFISME DE INELE ȘI CORPURI (N2)

1) $(A, *, \circ)$, $(B, \perp, \top)$ 2 inele $\Rightarrow$ f morf de inele

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ morf de grupuri între } (A,*) \text{ și } (B,\perp) \\ f \text{ morf de monoizi între } (A,\circ) \text{ și } (B,\top) \end{cases}$

$\mapsto$ $\begin{cases} f(x*y) = f(x) \perp f(y) \\ f(x \circ y) = f(x) \top f(y) \\ f(e_\circ) = e_\top \end{cases}$

2) f izom. de inele $\Leftrightarrow$ f morf de inele și f bijectivă

3) f automorf de inele $\Leftrightarrow$ f izomorf de inele și $A = B$

4) $(M, *, \circ)$, $(N, \perp, \top)$ 2 corpuri $\Rightarrow$ f morf de corpuri

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ morf de grupuri între } (M,*) \text{ și } (N,\perp) \\ f \text{ morf de grupuri între } (M\setminus\{e_*\},\circ) \text{ și } (N\setminus\{e_\perp\},\top) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x*y) = f(x) \perp f(y), \ \forall x, y \in M \\ f(x \circ y) = f(x) \top f(y), \ \forall x, y \in M\setminus\{e_*\} \end{cases}$

5) f izomorf de corpuri $\Rightarrow$ f morf de corpuri și f bijectivă

6) f automorf. de corpuri $\Leftrightarrow$ f izomorf de corpuri și $M = N$