MONOTONIA UNUI ȘIR

x_n s↑ $\Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$ (strict crescător)

x_n s↓ $\Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$ (strict descrescător)

x_n ↑ $\Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n$ (crescător)

x_n ↓ $\Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n$ (descrescător)

Obs1: dacă x_n s↑ $\Rightarrow x_n$ ↑

dacă x_n s↓ $\Rightarrow x_n$ ↓

Obs2: reciproc NU e adevărat,

adică x_n ↑ $\not\Rightarrow x_n$ s↑ nici

dacă x_n ↓ $\not\Rightarrow x_n$ s↓

Obs3: Pentru a arăta că x_n monoton folosim crit. diferenței sau crit. raportului, pentru a arăta că x_n nu e monoton e suficient să găsim o ordonare diferită a 3 termeni consecutivi

crit diferenței: calculăm $x_{n+1} - x_n$ și comparăm cu 0, astfel

$x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

$x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

$x_{n+1} - x_n \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow x_n$ ↑

$x_{n+1} - x_n \leq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_n$ ↓

crit. raportului: se poate folosi doar dacă x_n are toți termenii pozitivi, comparăm $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cu 1

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow x_n$ ↑

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow x_n$ ↓

Exemplu 1: $x_n = \frac{2n+1}{3n-1}$, $n \geq 2$, se cere monot.

met I: $x_{n+1} - x_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-1} - \frac{2n+1}{3n-1} =$

$= \frac{2n+3}{3n+2} - \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{6n^2+7n-3-(6n^2+7n+2)}{(3n+2)(3n-1)} =$

$= \frac{-5}{(3n+2)(3n+1)} < 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow$

$x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

met II: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-1}}{\frac{2n+1}{3n-1}} = \frac{2n+3}{3n+2} \cdot \frac{3n-1}{2n+1} =$

$= \frac{6n^2+7n-3}{6n^2+7n+2} < 1$ și cum x_n are toți term. pozitivi $\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n$ s↓

Exemplu 2: $x_n = \frac{3^{2n+1}}{2^n}$, $n \geq 1$, se cere monot.

met I: $x_{n+1} - x_n = \frac{3^{2n+3}}{2^{n+1}} - \frac{3^{2n+1}}{2^n} =$

$= \frac{3^{2n+1}(9-2)}{2^{n+1}} = \frac{3^{2n+1} \cdot 7}{2^{n+1}} > 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

met II: x_n are toți termenii pozitivi, calc. $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{2n+3}}{2^{n+1}}}{\frac{3^{2n+1}}{2^n}} = \frac{3^{2n+3}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{3^{2n+1}} = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n$ s↑

Exemplu 3: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$

met I: $x_{n+1} - x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} =$

$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot n - (-1)^n}{n(n+1)} = \frac{(-1)^n(-n-1)}{n(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

care nu-l putem compara cu 0

dăm valori, $x_1 = \frac{-1}{1} = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{-1}{3}$

$\Rightarrow x_1 < x_2 > x_3 \Rightarrow$ ordonare diferită

$\Rightarrow x_n$ nu e monoton

(N2) DEMONSTRAREA MĂRGINIRII UNUI ȘIR (N2)

Dacă $\exists m, M \in \mathbb{R}$ a.î. $m \leq x_n \leq M \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n$ mărginit (adică toți termenii sunt între două numere)
Dacă cel puțin la un capăt nu e mărginit
$\Rightarrow x_n$ nemărginit

Obs: se intuiesc capetele (prin datul valorilor lui n) și dacă x_n e mărginit, se arată prin calcul acest lucru

Exp: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, studiați mărginirea

E1) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$; $x_4 = \frac{1}{4}$, ...

E2) Obs. că $x_n \in [0; 1]$

E3) arătăm că $0 \leq x_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

• adev $\Rightarrow x_n$ mărginit

Exp 2: $x_n = 2^n$, $n \geq 1$, studiați mărginirea

E1) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$, $x_4 = 16$, ...

E2) ... $\Rightarrow x_n$ nemărginit pt că $\nexists M$

LIMITA UNUI ȘIR. ȘIR CONVERGENT. ȘIR DIVERGENT

(N2)

1) *limita unui șir* este „numărul finit" sau „∞" sau „$-\infty$" de care se apropie term. șirului de la un moment dat (este din $\overline{\mathbb{R}}$)

2) *un șir e convergent* dacă limita lui e finită (e număr)

3) *un șir e divergent* ⇔ șirul nu e convergent

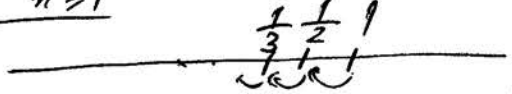
Obs 1: șir divergent poate fi
- cu limită, dar limita sa este ∞ sau $-\infty$
- fără limită

Obs 2: dacă x_n monoton ⇒ x_n are limită, reciproc NU

Obs 3: dacă x_n monot + mărg ⇒ ⇒ x_n convergent (WEIERSTRASS)

Obs 4: x_n converg ⇒ x_n mărg
x_n converg $\not\Rightarrow$ x_n monoton

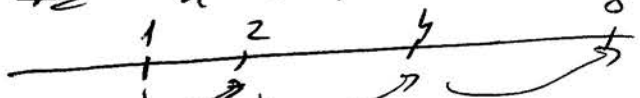
Exp 1: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, studiați converg.



$\Rightarrow \lim\limits_n x_n = \lim\limits_n \frac{1}{n} \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=} 0$

⇒ x_n are limită, e convergent, nu e divergent

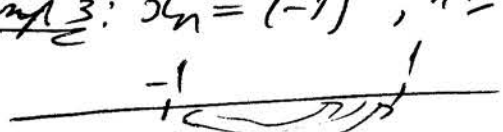
Exp 2: $x_n = 2^n$, $n \geq 0$



$\Rightarrow \lim\limits_n x_n = \lim\limits_n 2^n \overset{2^\infty}{=\!=} \infty$

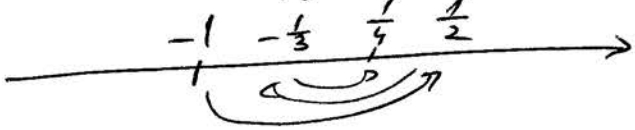
⇒ x_n are limită, nu e converg, e divergent

Exp 3: $x_n = (-1)^n$, $n \geq 1$



⇒ $\nexists \lim\limits_n x_n$ ⇒ x_n nu e converg
⇒ x_n e divergent

Exp 4: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$



⇒ $\lim\limits_n x_n = 0$ ⇒ x_n converg
⇒ x_n nu e diverg

Exp 5: Fără a calcula limita, arăt. că $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ e converg,

E_1) monot:

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)} =$

$= -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$

⇒ $x_n \searrow$ (1)

E_2) mărg:

$x_n \searrow \Rightarrow x_n \leq x_1 \Rightarrow x_n \leq 1$

Cum $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow x_n > 0 \Rightarrow x_n \geq 0$

⇒ $x_n \in [0;1] \Rightarrow x_n$ mărg (2)

E_3) din x_n monot + mărg ⇒
⇒ x_n converg

PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CE TIND LA 0

(N2)

1) $x_n \to 0$, y_n mărginit $\Rightarrow x_n \cdot y_n \overset{0\cdot[\,]}{=\!=} 0$

2) $x_n \to \pm\infty$, y_n mărginit $\Rightarrow \frac{y_n}{x_n} \overset{\frac{[\,]}{\pm\infty}}{=\!=} 0$

3) $|x_n| \to 0 \Leftrightarrow x_n \to 0$

4) CRITERIUL MAJORĂRII

$|x_n - l| \le y_n$, $y_n \to 0 \Rightarrow x_n \to l$

Exp 1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} \cdot \cos n \overset{0\cdot[-1,1]}{=\!=} 0$

Exp 2: $\lim\limits_n \frac{\sin n}{n} \overset{\frac{[-1,1]}{\infty}}{=\!=} 0$

Exp 3: $\lim\limits_n \frac{\cos n}{\frac{1}{n}} \overset{\frac{[-1,1]}{0}}{=\!=}$ deci NU pot folosi limita de mai sus

Exp 4: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, se cere $\lim\limits_n x_n$

$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$

Cum $|x_n| \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$

Exp 5: Dacă $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < \left(\frac{5}{7}\right)^n$, se cere $\lim\limits_n x_n$

E1) Deoarece $\lim\limits_n \left(\frac{5}{7}\right)^n \overset{2^n}{=\!=} 0$, $2 \in (-1,1)$

și $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < \left(\frac{5}{7}\right)^n \Rightarrow$

E2) $\lim\limits_n \left|x_n - \frac{3}{2}\right| \le \lim\limits_n \left(\frac{5}{7}\right)^n$

$\Rightarrow \lim\limits_n \left|x_n - \frac{3}{2}\right| \le 0$, $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_n \left|x_n - \frac{3}{2}\right| = 0 \Rightarrow x_n \to \frac{3}{2}$

CRITERIUL CLEȘTELUI (N2)

Dacă $a_n < b_n < c_n$ și $a_n \to l$, $c_n \to l$

$\Rightarrow b_n \to l$

Scriem astfel

$$\left.\begin{array}{l} a_n < b_n < c_n \\ \to l \quad l \end{array}\right\} \Rightarrow b_n \to l$$

Obs: relație e adevărată și dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$ sau $a_n < b_n \leq c_n$ sau $a_n \leq b_n < c_n$

Obs. 2: dacă x_n este o sumă,

E_1) scriem suma desfășurat

E_2) încadrăm fiecare termen în funcție de cel mai mic, respectiv cel mai mare

E_3) se adună inegalitățile obținute $\Rightarrow a_n \leq x_n \leq b_n$ cu x_n șirul nostru

E_4) dacă $a_n \to l$ și $b_n \to l \Rightarrow x_n \to l$

dacă a_n și b_n au limite diferite, căutăm o încadrare „mai strânsă"

Exp 1: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, se cere $\lim_n x_n$ cu crit. clește lui

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \to 0 \qquad\quad 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

Exp 2: $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, se cere $\lim x_n$

E_1) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

E_2) $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

- - - - - - - - - - -

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

E_3) „+": $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

E_4) $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{\frac{1}{1}} 1$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$

E_5) deci,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \\ \to 1 \qquad\quad 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n \to 1$

LIMITA UNEI FUNCȚII DATE PRIN ACOLADE

TIP I: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x<\alpha \\ f_2(x), & x\geq\alpha \end{cases}$

E_1) f are limită pe $(-\infty,\alpha)$ și pe (α,∞) ca și fct. elementară

E_2) studiem dacă f are limită în $x=\alpha$

$$l_s(\alpha)=\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f_1(x)$$

$$l_d(\alpha)=\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f_2(x)$$

E_3) dacă $l_s(\alpha)=l_d(\alpha)\Rightarrow f$ are limită în $x=\alpha$

dacă $l_s(\alpha)\neq l_d(\alpha)$ sau dacă $\nexists$ vreuna din limite $\Rightarrow f$ nu are limită în $x=\alpha$

TIP II: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\mathbb{Q} \\ f_2(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Se cere studiera dacă f are limită în $x=\alpha$

E_1) calculăm $l_1(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x_n\to\alpha \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f_1(x)$

$$l_2(\alpha)=\lim_{\substack{x_n\to\alpha \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f_2(x)$$

E_2) Dacă $l_1(\alpha)=l_2(\alpha)\Rightarrow f$ are limită în $x=\alpha$

Dacă $l_1(\alpha)\neq l_2(\alpha)$ sau dacă $\nexists$ vreuna din ele $\Rightarrow f$ nu are limită în $x=\alpha$

Exemplu: $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x<2 \\ x+5, & x>2 \end{cases}$

Studiați dacă f are limită în $x=2$

E_1) $l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x<2}}(3x+1)=7$

$l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2 \\ x>2}}(x+5)=7$

E_2) $l_s(2)=l_d(2)\Rightarrow f$ are limită în $x=2$

Exemplu 2: $f(x)=\begin{cases} 7x-1, & x\in\mathbb{Q} \\ x+3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Studiați dacă f are limită în $x=5$

$l_1(5)=\lim\limits_{\substack{x_n\to5 \\ x_n\in\mathbb{Q}}}(7x_n-1)=34$

$l_2(5)=\lim\limits_{\substack{x_n\to5 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}(x_n+3)=8$

$l_1\neq l_2\Rightarrow f$ nu are limită în $x=5$

OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII. CAZURI EXCEPTATE

1) atunci când $x \to a$, unele limite se pot calcula direct prin înlocuirea lui x cu a (asemănător limitelor de la șiruri).

2) dacă acest lucru nu e posibil obținem cazuri exceptate (nedeterminări), adică limite care, pentru a putea fi calculate, trebuie prelucrată expresia funcției

3) Cazurile exceptate sunt:

1) $\infty - \infty$ ← rationalizare, factor forțat

2) $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ ← factor forțat, limite remarcabile

3) $\infty \cdot 0$ sau $0 \cdot \infty$ ← limite remarcabile, folosim $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$

4) 1^{∞} cu $\lim\limits_{x_n \to 0} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$

5) $\infty^0; 0^0; 0^{\infty}$ se folosește $f^g = e^{g \cdot \ln f}$

Exp 1: $\lim\limits_{x \to 3} (2x-5) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

Exp 2: $\lim\limits_{x \to \infty} (2x-5) \overset{2 \cdot \infty - 5}{=\!=} \infty$

Exp 3: $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x + 3) \overset{\infty - \infty + 3}{=\!=}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \overset{\infty(1-0+0)}{=\!=} \infty$

Exp 4: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^5 - 1}{x^2 + x} \overset{\frac{-\infty - 1}{\infty - \infty}}{=\!=}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{1}{x^5}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \overset{\frac{-\infty \cdot 3}{1}}{=\!=} -\infty$

Exp 5: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \overset{\frac{2}{5}}{=\!=} \frac{2}{5}$

Exp 6: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} \overset{\frac{1}{\infty \cdot 1}}{=\!=} 0$

Exp 7: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$

desc. factori, $x^2 - 3x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 1(x-1)(x-2)$ și

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$\Rightarrow l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)} \overset{\frac{-1}{3}}{=\!=} -\frac{1}{3}$

Exp 8: $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\ln(2x+1) - \ln(x+2)\right] =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \ln \frac{2x+1}{x+2} = \ln\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x+2}\right) =$

$= \ln\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}\right) = \ln 2$

LIMITE REMARCABILE DE FUNCȚII

$$\lim_{u(x)\to\pm\infty} P(x) = \lim_{u(x)\to\pm\infty} (\text{term de grad maxim})$$

1) $$\lim_{u(x)\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{grad } P < \text{grad } Q \\ \text{raportul coef de grad maxim}, & \text{grad } P = \text{grad } Q \\ \lim\limits_{u(x)\to\pm\infty} \left(\text{raportul termenilor de grad maxim}\right) = \infty, & \text{grad } P > \text{grad } Q \end{cases}$$

2) $$\lim_{u(x)\to\infty} 2^{u(x)} = \begin{cases} \nexists, & 2 < -1 \\ \nexists, & 2 = -1 \\ 0, & 2 \in (-1;1) \\ 1, & 2 = 1 \\ \infty, & 2 > 1 \end{cases}$$

3) $$\lim_{u(x)\to\infty} \frac{P(u(x))}{a^{u(x)}} = \begin{cases} \infty \cdot \lim\limits_{u(x)\to\infty} P(x), & a \in (0;1) \\ 0, & a \in (1;\infty) \end{cases}$$

4) $$\lim_{u(x)\to\infty} \frac{\ln(u(x))}{u(x)} = 0$$

5) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a$$

6) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$$

7) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{(1+u(x))^{r} - 1}{u(x)} = r$$

8) $$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\sin(u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{tg}(u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\arcsin(u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(u(x))}{u(x)} = 1$$

Obs.: nu sunt limite remarcabile

$$\lim_{u(x)\to 0} \frac{\cos(u(x))}{u(x)}, \text{ nici } \lim_{u(x)\to 0} \frac{\arccos(u(x))}{u(x)},$$

$$\text{nici } \lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{ctg}(u(x))}{u(x)}, \text{ nici } \lim_{u(x)\to 0} \frac{\operatorname{arcctg}(u(x))}{u(x)}$$

9) $$\lim_{u(x)\to 0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$$

LIMITE REMARCABILE DE FUNCȚII. (N2)

EXEMPLE

Exp 1: $\lim_{x\to-\infty}(5x^2-7x^3+x+2)=$

$=\lim_{x\to-\infty}(-7x^3)=\infty$

Exp 2: $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^7+2x-1}{3x^2+x+2}=$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^7}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{3}x^5=-\infty$

Exp 3: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{2x^2+3}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{2x^2+3}\overset{0\cdot\frac{1}{2}}{=\!=}0,$

s-a folosit $\lim_{u(x)\to\infty}\frac{\ln|u(x)|}{u(x)}=0$

pt $u(x)=x^2+1\to\infty$ și

$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\overset{grP=grQ}{=\!=}$ raportul coef de gr maxim

Exp 4: $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(5x)}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(5x)}{5x}\cdot\frac{5x}{3x}$

$=1\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$, s-a folosit

$\lim_{u(x)\to0}\frac{\operatorname{tg}|u(x)|}{u(x)}=1$ pt $u(x)=5x\to0$

Exp 5: $\lim_{x\to\infty}2^x\sin\left(\frac{2}{3}\right)^x\overset{\infty\cdot0}{=\!=}$

$=\lim 2^x\cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left|\frac{2}{3}\right|^x}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1}=$

$1\to\infty$!

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x\overset{1\cdot\infty}{=\!=}\infty$

s-a folosit

$\lim_{u(x)\to0}\frac{\sin|u(x)|}{u(x)}=1$ pt $u(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\to0$

și $\lim_{x\to\infty}2^x=\infty$ pt $2=\frac{4}{3}>1$

Exp 6: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\ln(1+\sin 3x)}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{3x}{\ln(1+\sin 3x)}\cdot\frac{1}{3x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{3x}{\ln(1+\sin 3x)}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{3x}=$

$\overset{1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}}{=\!=}\frac{1}{3}$, s-a folosit

$\lim_{u(x)\to0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$ pt

$u(x)=\sin x\to0$

și pt $u(x)=3x\to0$

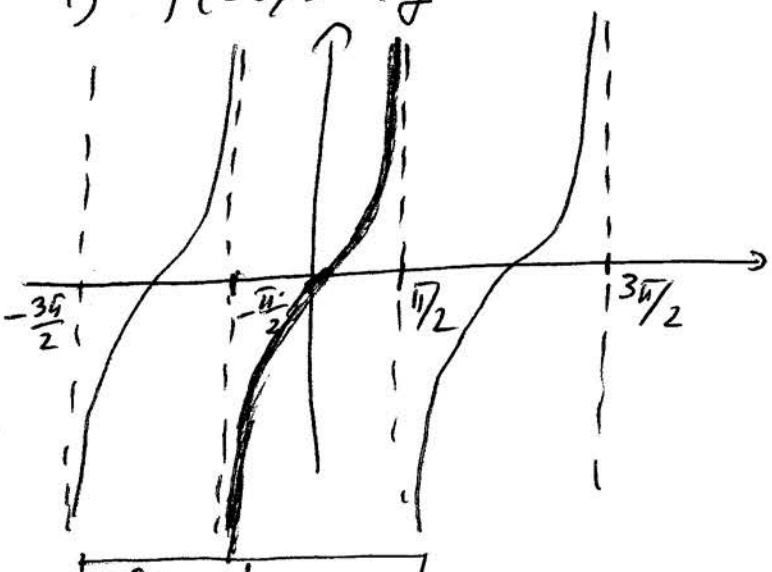
și $\lim_{u(x)\to0}\frac{\sin|u(x)|}{u(x)}=1$

pt $u(x)=x\to0$

LIMITE TRIGONOMETRICE

DEDUSE DIN GRAFIC

1) $f(x) = tg\, x$



$\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} tg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x > \pi/2}} tg\, x = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3\pi}{2} \\ x < \frac{3\pi}{2}}} tg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} tg\, x = -\infty$

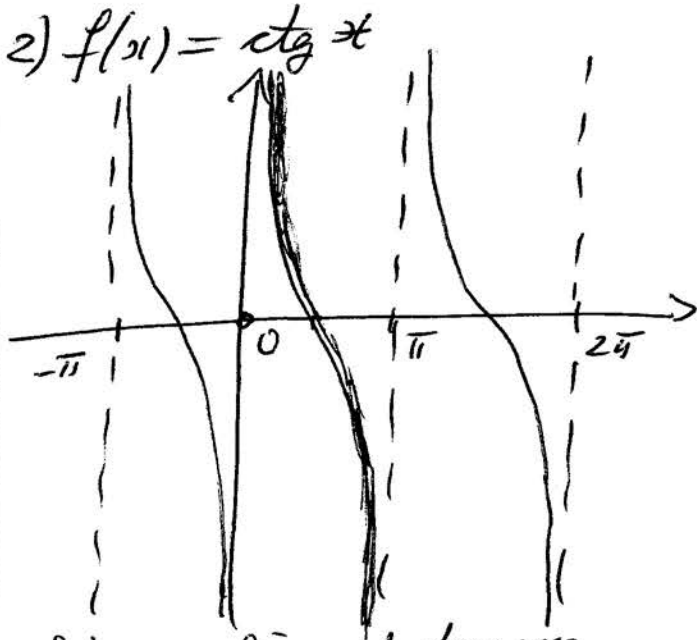
etc

Obs.: deoarece $arctg\, x$ este inversa fct bijective $tg\, x$ doar pe $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to \infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$ si

$\lim\limits_{x \to -\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2}$

2) $f(x) = ctg\, x$



Din grafic, deducem

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} ctg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} ctg\, x = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x > \pi}} ctg\, x = \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ x > -\pi}} ctg\, x = \infty$

etc

Obs.: deoarece $arcctg\, x$ este inversa fct. bijective $ctg\, x$ doar pe $(0; \pi) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to \infty} arcctg\, x = 0$ si

$\lim\limits_{x \to -\infty} arcctg\, x = \pi$

LIMITE LOGARITMICE ȘI LIMITE EXPONENȚIALE

$$\lim_{x\to\infty} \log_b x \overset{b\in(1;\infty)}{=\!=} \infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_b x \overset{b\in(1;\infty)}{=\!=} -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_b x \overset{b\in(0;1)}{=\!=} -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_b x \overset{b\in(0;1)}{=\!=} \infty$$

Obs.: aceste limite se deduc din definiția logaritmului și prin considerarea cenii și prin considerarea cenii exemplu de bază în fiecare caz, de exp $b=2$ pt $(1;\infty)$ și $b=\frac{1}{2}$ pt $(0;1)$

Obs.: deoarece $e=2{,}71\ldots$ $\Rightarrow e\in(1;\infty)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \text{ și } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \begin{cases} \nexists, & 2<-1 \\ \nexists, & 2=-1 \\ 0, & 2\in(-1;1) \\ 1, & 2=1 \\ \infty, & 2>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = \begin{cases} 0, & 2<-1 \\ \nexists, & 2=-1 \\ \nexists, & 2\in(-1;0) \\ 0, & 2=0 \\ \infty, & 2\in(0;1) \\ 1, & 2=1 \\ 0, & 2>1 \end{cases}$$

Obs.: această limită e greu de memorat, considerăm câte un exemplu pt 2 în fiecare caz

Exp 1: $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2)^x = (-2)^{-\infty} = \frac{1}{(-2)^{\infty}} \overset{\frac{1}{\pm\infty}}{=\!=} 0$

Exp 2: $\lim\limits_{x\to-\infty} (-1)^x = (-1)^{-\infty} = \frac{1}{(-1)^{\infty}} < {}_{1}\nexists^{-1}$

Exp 3: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^x = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{\infty} < \nexists^{-\infty}$

(M2) METODA NOTAȚIEI LA CALCULUL LIMITELOR

- deoarece majoritatea limitelor sunt date pentru $x \to 0$ sau pentru $x \to \infty$, dacă nu avem așa ceva și dacă nu putem calcula direct, atunci notăm.

- orice limită care se rezolvă cu notație poate fi rezolvată și direct, însă ne putem înșela de aceea e preferabil să notăm

---

Exp 1: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=t}{\underset{x=\frac{1}{t}}{=}} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2^t-1}{t} =$

$= \ln 2$

mod II: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \ln 2$ pt că

dacă $x \to \infty$ atunci $\frac{1}{x} \to 0$ și folosim

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2^t-1}{t} = \ln 2$

Exp 2: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-27}{x-3} \overset{x=t+3}{=}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3^{t+3}-27}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{3^3(3^t-1)}{t} =$

$= 27 \cdot \ln 3$

mod II: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3^x-27}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{27(3^{x-3}-1)}{x-3} =$

$= 27 \cdot \ln 3$

Exp 3: $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{8}} \overset{x-64=t}{\underset{x=t+64}{=}}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t+64}-8}{\sqrt[4]{t+64}-\sqrt{8}}$ amplificăm conjugații

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(\sqrt{t+64}-8)(\sqrt{t+64}+8)}{\sqrt{t+64}+8} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8}}{(\sqrt[4]{t+64}-\sqrt{8})(\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8})} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t+64-64}{\sqrt{t+64}+8} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8}}{\sqrt{t+64}-8} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8})}{t+64-64} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(\sqrt[4]{t+64}+\sqrt{8})}{t} =$

$= \sqrt{8}+\sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

mod II: dacă eram deștepți,

$\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{(\sqrt{x}-8)}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt{8})} \dfrac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{8})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{8})} = \lim\limits_{x\to 64} \dfrac{(\sqrt{x}-8)(\sqrt[4]{x}+\sqrt{8})}{\sqrt{x}-8}$

$= \sqrt{8}+\sqrt{8} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

DEFINIȚIA CONTINUITĂȚII. PUNCTE DE DISCONTINUITATE (N2)

1) continuitatea se poate studia doar în $x=\alpha \in D_f$ (din domeniu)

2) f cont în $x=\alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$

3) f cont în $x=\alpha \Leftrightarrow$

$(\forall x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n)\to f(\alpha)$

4) Dă a arăta că f nu e cont în $x=\alpha$ sau arătăm că $l_s(\alpha), l_d(\alpha)$ și $f(\alpha)$ NU sunt toate 3 egale între ele, (sau) arătăm că $\exists x_n \to \alpha$ cu $f(x_n)\not\to f(\alpha)$ (sau)

$\exists x_n\to\alpha,\ x'_n\to\alpha$ cu $\lim\limits_{x_n\to\alpha} f(x_n) \neq \lim\limits_{x'_n\to\alpha} f(x'_n)$

5) $x=\alpha \in D_f$ cu f NU e continuă în $x=\alpha$, e pct de DISCONTINUITATE

6) dacă $\alpha\in D_f$, $l_s(\alpha)\in\mathbb{R}$, $l_d(\alpha)\in\mathbb{R}$ dar f NU E CONTINUĂ în $x=\alpha$ atunci $x=\alpha$ pct discont I speță

7) dacă $\alpha\in D_f$, $x=\alpha$ pct de discont care NU E de speța I $\Rightarrow x=\alpha$ e pct de discont de speța II

8) f cont în $\forall$ pct izolat al D_f, oricare ar fi funcția f

9) dacă f elementară și D_f interval și f nu schimbă forma pe $D_f \Rightarrow f$ continuă pe tot D_f

---

Ex 1: $f:(-\infty,3]\cup\{5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$

Studiați continuitatea lui f în

a) $x=-1$ b) $x=4$ c) $x=5$

f elementară pe $(-\infty,3]$ și $x=-1\in D_f$ $\Rightarrow f$ cont în $x=-1$. Deoarece $x=4\notin D_f$ $\Rightarrow$ nu se poate pune problema continuității în $x=4$

Deoarece $x=5$ este punct izolat pt $D_f \Rightarrow f$ cont în $x=5$

Ex 2: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 2\\ \frac{1}{2}, & x=2\end{cases}$ unde $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$. Studiați cont în $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\\ f(2)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Rightarrow f$ cont în $x=2$

Ex 3: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Studiați dacă f cont în $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=-1$$

$$l_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=1$$

Cum $l_s(0)\neq l_d(0) \Rightarrow f$ nu e cont în $x=0$

Deoarece $l_s(0)\in\mathbb{R}$, $l_d(0)\in\mathbb{R}$ și $x=0\in D_f$.

$\Rightarrow x=0$ pct disc I speță

Ex 4: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$, studiați cont în $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ se împarte în 2 limite

$$l_s(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{1-x}\ \frac{1}{0_+}\to\infty$$

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x=1$, $f(1)=1$

$\Rightarrow x=1$ pct disc. II speță

FUNCȚII CONTINUE ȘI INJECTIVE (N2)

1) f continuă și injectivă $\Rightarrow f$ strict monotonă
2) f continuă și nu e strict monotonă $\Rightarrow f$ nu e injectivă

Exp: Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2011}+1$, arăt. că f este strict monotonă

E_1) f continuă ca și funcție elementară (1)

E_2) $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^{2011}+1=x_2^{2011}+1\Rightarrow x_1^{2011}=x_2^{2011}\ /\sqrt[2011]{\ }$

$\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ injectivă (2)

E_3) Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ strict monotonă

(M8) STUDIEREA DERIVABILITĂȚII UNEI FUNCȚII CU ACOLADE DE TIPUL (N2)

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x<\alpha \\ f_2(x), & x\geq\alpha \end{cases}$$

E_1) f derivabilă pe $(-\infty;\alpha)$ și pe (α,∞), studiem în $x=\alpha$

E_2) deși e opțională, este preferabilă studierea continuității în $x=\alpha$

- dacă f nu e cont. în $x=\alpha \Rightarrow f$ nu e derivabilă în $x=\alpha$, STOP
- dacă f e cont în $x=\alpha \Rightarrow E_3$

E_3) calculăm $f'_s(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ și $f'_d(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

Dacă $f'_s(\alpha)=f'_d(\alpha)\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă în $x=\alpha$

Dacă $f'_s(\alpha)=f'_d(\alpha)=+\infty$ sau $=-\infty \Rightarrow f$ are derivată în $x=\alpha$ dar nu e derivabilă

Dacă $f'_s(\alpha)\neq f'_d(\alpha) \Rightarrow f$ nu e derivabilă, nu are derivată

Exp: $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<2 \\ x^2-4x+5, & x\geq 2 \end{cases}$ Studiați derivabilitatea în $x=2$

E_1) f cont în $x=2$ (?)

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} (x-1)=1$; $l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (x^2-4x+5)=1$; $f(2)=1$

$\Rightarrow f$ cont în $x=2$

E_2) f deriv în $x=2$

$$f'_s(2)=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \frac{x-1-1}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} 1=1$$

$$f'_d(2)=\lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \frac{x^2-4x+5-1}{x-2} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} \frac{(x-2)^2}{x-2}=0$$

$\Rightarrow$ nu e deriv în $x=2$

PUNCT UNGHIULAR. PUNCT DE ÎNTOARCERE

(N2)

$x=\alpha$ punct unghiular pt G_f dacă:

1) f cont în $x=\alpha$

2) f nu e derivab în $x=\alpha$

3) $\exists f'_s(\alpha), f'_d(\alpha)$, cel puțin una finită

Obs.: se notează $x=\alpha$ pct $\nexists$

$x=\alpha$ punct de întoarcere pt G_f dacă:

1) f cont în $x=\alpha$

2) f nu e derivab în $x=\alpha$

3) $(f'_s(\alpha)=-\infty$ și $f'_d(\alpha)=\infty)$ sau $(f'_s(\alpha)=\infty$ și $f'_d(\alpha)=-\infty)$

Obs.: se notează $x=\alpha$ pct $\leftarrow$

Ex1: studiați dacă $x=1$ este pct $\nexists$ sau pct de $\leftarrow$ pt G_f,

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$$

E_1) f cont în $x=1$ (?)

$$l_s(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-1)=0$$

$$l_d(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2-1)=0$$

$\Rightarrow f$ cont în $x=1$ (1)

$f(1)=1-1=0$

E_2) $f'_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x-1-0}{x-1}=1$

$f'_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2-1-0}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)=2$

$f'_s(1)\neq f'_d(1)\Rightarrow f$ nu e deriv în $x=1$ (2)

E_3) $\exists f'_s(1), f'_d(1)$, cel puțin una finită (3)

E_4) din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow x=1$ e pct $\nexists$

Ex2: studiați dacă $x=0$ este pct $\nexists$ sau de $\leftarrow$ pt G_f,

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$

E_1) f cont în $x=0$ (?)

$$l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt[3]{x^2}=0$$

$$l_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt[3]{x^2}=0$$

$\Rightarrow f$ cont în $x=0$ (1)

$f(0)=\sqrt[3]{0}=0$

E_2) $f'_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}x^{-\frac{1}{3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\overset{\frac{1}{0-}}{=\!=}-\infty$

$f'_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{-\frac{1}{3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\overset{\frac{1}{0+}}{=\!=}\infty$

$\Rightarrow f'_s(0)\neq f'_d(0)$ (2)

E_3) $f'_s(0)=-\infty$, $f'_d(0)=\infty$ (3)

E_4) din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow x=0$ e pct de $\leftarrow$

FUNCȚII CU DERIVATA NULĂ (N2)

1) Dacă $f'(x)=0$ pe un interval $\Rightarrow f(x)=k$ (constantă) pe acel interval, pt a afla constanta dăm o valoare lui x

2) Dacă $f'(x)=g'(x)$ pe un interval $\Rightarrow f(x)$ și $g(x)$ diferă printr-o constantă pe acel interval, pentru a-i afla constanta, calculăm într-o valoare oarecare

---

Exemplu: Arătați că: $\sin^2 x+\cos^2 x=1, \forall x\in\mathbb{R}$

E_1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

E_2) $f'(x)=2\sin x\cdot\cos x+2\cos x\cdot(-\sin x)=0 \Rightarrow f$ este constantă pe acel interval, $f(x)=k, \forall x\in\mathbb{R}$ $\Big\}\Rightarrow$

E_3) $f(0)=\sin^2 0+\cos^2 0=0+1 \Rightarrow f(0)=1$

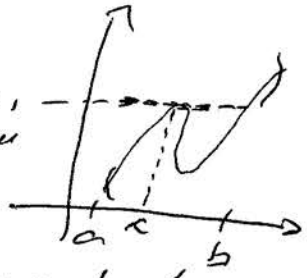
$\Rightarrow f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=1, \forall x\in\mathbb{R}$

(M8) (N2)

TEOREMA LUI FERMAT

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $x_0=c$ un punct de extrem, $c\in(a,b)$.
Dacă f derivabilă în $x_0=c$ atunci $f'(c)=0$

dem intuitivă:
E_1) f reconstentă $\Rightarrow \exists$ c pct de extrem,
E_2) indiferent dacă e pct minim sau maxim $\Rightarrow$ tg la G_f în $x=c$ este $\parallel Ox$
E_3) $m_{tg}=m_{Ox}\Rightarrow f'(c)=0$
Obs: Reciproc NU, dacă $f'(c)=0 \not\Rightarrow x=c$ pct extrem



Exp 1: Dacă $a^x+b^x\geq a+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$, calculați $a^a\cdot b^b$ dacă $a>0$, $b>0$

E_1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x+b^x\Rightarrow$ relația din ip. devine $f(x)\geq f(1)\Rightarrow x=1$ pct de extrem (MINIM)
E_2) Evident $1\in(-\infty;\infty)$ și f derivabilă în $x=1$ $\xrightarrow{T.\ Fermat}$ $f'(1)=0$
E_3) $f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b\Rightarrow f'(1)=a\ln a+b\ln b$
Cum $f'(1)=0\Rightarrow \ln a^a+\ln b^b=0\Rightarrow$
$\ln(a^a b^b)=0\Rightarrow a^a b^b=e^0\Rightarrow \boxed{a^a b^b=1}$

Exp 2: Găsiți $a>0$ dacă $e^x-ax\geq ?$, $\forall x\in\mathbb{R}$

E_1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$, obs. că $f(0)=e^0-0\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow$ relația din ip devine $f(x)\geq f(0)$
E_2) Cum $0\in(-\infty,\infty)$ și f deriv în $x=0$
$\Rightarrow f'(0)=0$ (T. Fermat)
E_3) $f'(x)=e^x-a$, $f'(0)=0\Rightarrow 1-a=0$
$\Rightarrow a=1$ cond. necesară, nu suficientă
E_4) Pt $a=1$ sigur $f'(0)=0$ dar s-ar putea ca $x=0$ să nu fie neapărat de extrem, trebuie să verificăm
E_5) $a=1\Rightarrow f(x)=e^x-x$, $f'(x)=e^x-1$,
$f'(x)=0\to e^x=1\Rightarrow x=0$

E_6)

x		0	
f'	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f'(-1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0$; $f'(1)=e-1>0$,
$\to x=1$ pct extrem și $f(1)\geq 1$

Obs.: în probleme, se folosește că dacă α punct de extrem din interiorul D$_f$ în care f e derivabilă atunci $f'(\alpha)=0$, însă trebuie verificat apoi dacă într-adevăr α este punct de extrem, adică dacă $f'(x)$ schimbă semnul în $x=\alpha$
Exp: Găsiți $a=?$ dacă $f(x)=2x^3-ax^2+1$ are pe $x=1$ pct de extrem

E_1) f derivabilă în $x=1\xrightarrow{T.\ Fermat} f'(1)=0$
E_2) $f'(x)=6x^2-2ax$, $f'(1)=0\to 6-2a=0$
$\Rightarrow a=3$ valoare posibilă
E_3) studiem dacă pt $a=3\Rightarrow x=1$ e punct de extrem
$f(x)=2x^3-3x^2+1$
$f'(x)=6x^2-6x$, $f'(x)=0\Rightarrow$
$6x(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{sau} \\ x=1 \end{cases}$

E_4)

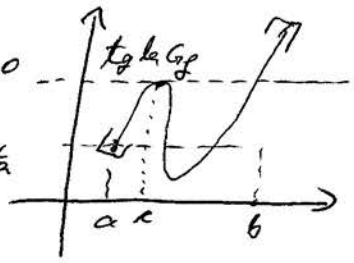
x		0		1	
f'	$+$	0	$-\ -\ -\ -$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\to x=1$ pct de extrem $\Rightarrow$
$a=3$ valoare corectă

TEOREMA LUI ROLLE

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu
a) f cont pe $[a,b]$
b) f derivabilă pe (a,b)
c) $f(a)=f(b)$
atunci $\exists c\in(a,b)$ cu $f'(c)=0$

dem. intuitivă:
E_1) f constantă $\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow \forall c\in(a,b)$ cu $f'(c)=0$
E_2) f nu e constantă, din $f(a)=f(b)\Rightarrow \exists$ cel puțin un punct de extrem notat $c\Rightarrow$ tangenta în $x=c$ este $\parallel$ cu Ox
E_3) $m_{tg}=m_{Ox}\Rightarrow f'(c)=0$



Exp 1: $m,n,p=?$ dacă f verifică ip. T lui Rolle și găsiți c corespunzător pt
$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+p, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_1) f cont pe $[-1,0)$ și pe $(0,1]$, punem condiția ca f cont în $x=0\Leftrightarrow l_s(0)=l_d(0)=f(0)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p=1=p\Rightarrow p=1\Rightarrow f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+1, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_2) f derivabilă pe $[-1,0)$ și pe $(0,1)$, punem cond ca f derivabilă în $x=0\Leftrightarrow f_s'(0)=f_d'(0)\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{mx^2+nx+1-1}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^x-1}{x-0}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x(mx+n)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^x-1}{x}\Leftrightarrow \boxed{n=1}$
$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} mx^2+x+1, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_3) $f(-1)=f(1)\Leftrightarrow m-1+1=e\Leftrightarrow \boxed{m=e}$
$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ex^2+x+1, & x\in[-1,0] \\ e^x, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_4) f verifică ip T. lui Rolle $\Leftrightarrow \exists c\in(-1,1)$ cu $f'(c)=0$
Caz I: $c\in[-1,0]\Rightarrow 2ec+1=0\Rightarrow c=-\frac{1}{2e}\in[-1,0)$
Caz II: $c\in(0,1]\Rightarrow e^c=0\Rightarrow \nexists c\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{c=-\frac{1}{2e}}$ e singura valoare

Exp 2: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$
Arătați că ec. $f'(x)=0$ are doar rad. reale

E_1) Als. că $f(-1)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$
E_2) Fie $f_1:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=(x-3)(x-2)(x-1)(x+1)$ și f cont pe $[-1,1]$, f derivabilă pe $(-1,1)$, $f(-1)=f(1)$
T. Rolle $\Rightarrow \exists c_1\in(-1,1)$ cu $f_1'(c_1)=0\Rightarrow f'(c_1)=0$
E_3) Analog pt $f_2:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=f(x)$ și pentru $f_3:[2,3]\to\mathbb{R}$, $f_3(x)=f(x)\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists c_2\in(1,2)$ cu $f'(c_2)=0$ și $\exists c_3\in(2,3)$ cu $f'(c_3)=0\Rightarrow f'$ are cel puțin 3 rădăcini reale
E_4) Deoarece f are gradul IV $\Rightarrow f'$ are gradul III $\Rightarrow f'$ are cel mult 3 rad. reale $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ toate rădăcinile lui f sunt reale

Exp 3: Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ derivabilă, $f(0)=0$, arătați că $\exists u\in(0,1)$ cu $f'(u)=\frac{f(u)}{1-u}$

E_1) Scriem relația din concluzie sub forma $g'(u)=0$ și g trebuie să verifice ip teoremei lui Rolle pe $[0,1]$
E_2) $f'(u)=\frac{f(u)}{1-u}\Leftrightarrow (1-u)f'(u)=f(u)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(u)(1-u)-f(u)=0\Leftrightarrow \big(f(u)(1-u)\big)'=0$
E_3) Fie $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)(1-x)$
f derivabilă $\Rightarrow g$ cont pe $[0,1]$, deriv pe $(0,1)$
și $g(0)=f(0)\cdot1\overset{ip}{=}0$; $g(1)=f(1)\cdot0=0\Rightarrow$
$g(0)=g(1)\overset{Rolle}{\Rightarrow}\exists c\in(0,1)$ a.î. $g'(c)=0$
E_4) $g'(x)=\big(f(x)(1-x)\big)'=f'(x)(1-x)+f(x)\cdot(-1)$
$g'(c)=0\Rightarrow f'(c)(1-c)-f(c)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(c)}{1-c}\Rightarrow f'(u)=\frac{f(u)}{1-u}$

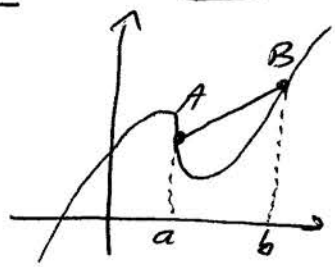
Exp 4: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, f,g cont pe $[a,b]$, deriv pe (a,b) și $\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(b)}{g(b)}\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ cu $\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

E_1) $\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Leftrightarrow f(c)g'(c)-f'(c)g(c)=0$, relație ce apare la $\left(\frac{f}{g}\right)'$
$\Rightarrow \frac{f(c)g'(c)-f'(c)g(c)}{g^2(c)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)'=0$
E_2) Fie $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ care verifică ip T lui Rolle $\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ cu $h'(c)=0$
E_3) $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ și $h'(c)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c)g(c)-f(c)g'(c)=0\Rightarrow \frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

TEOREMA LUI LAGRANGE (N2)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu
a) f cont pe $[a,b]$
b) f derivabilă pe (a,b)
atunci $\exists c\in(a,b)$ cu
$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

dem intuitivă:



E_1) $A(a,f(a)), B(b,f(b)) \Rightarrow m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

E_2) $\exists c\in(a,b)$ cu proprietatea că tangenta în c la G_f este paralelă cu $AB \Rightarrow m_{tg}=m_{AB} \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Exp 1: $a,b=?$ dacă funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0] \\ ax+b, & x\in(0,1] \end{cases}$ verif. ip T lui Lagrange și determinați punctele c corespunzătoare

E_1) f cont pe $[-1,0)$ și pe $(0,1]$ ca fct elemend, trebuie ca f cont în $x=0 \Leftrightarrow l_s(0)=l_d(0)=f(0)$
$\Leftrightarrow 1=b=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0] \\ ax+1, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_2) f derivabilă pe $[-1,0)$ și pe $(0,1]$, punem cond ca f derivabilă în $x=0 \Leftrightarrow f'_s(0)=f'_d(0)\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \frac{ax+1-1}{x} \Leftrightarrow 1=a$
$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[-1,0] \\ x+1, & x\in(0,1] \end{cases}$

E_3) f verif ip T lui Lagrange $\Rightarrow \exists c\in(-1,1)$ cu $f(1)-f(-1)=f'(c)(1-(-1)) \Rightarrow 2-\frac{1}{e}=2f'(c)$

Cazul I: $c\in[-1,0] \Rightarrow 2-\frac{1}{e}=2e^c \Rightarrow e^c=1-\frac{1}{2e}$
$\Rightarrow c=\ln(1-\frac{1}{2e})\in(-1,0] \Rightarrow$ OK

Cazul II: $c\in(0,1) \Rightarrow 2-\frac{1}{e}=2\cdot 1 \Rightarrow$ KO $\Rightarrow$
$c=\ln(1-\frac{1}{2e})$ singura valoare

Exp 2: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, arătați că $\forall k\in(0,\infty) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < f(k+1)-f(k) < \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

E_1) f cont pe $[k,k+1]$, derivabilă pe $(k,k+1) \Rightarrow$
$\exists c\in(k,k+1)$ cu $f(k+1)-f(k)=f'(c)(k+1-k)$
$\Rightarrow f(k+1)-f(k)=f'(c)$ și $f'(x)=\frac{3}{2}\cdot(x^{\frac{2}{3}})' \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

E_2) $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ și cum $c\in(k,k+1)$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} < f(k+1)-f(k) < \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$

Exp 3: Rezolvați ec. $3^x+4^x=2^x+5^x$

E_1) Ec. devine: $3^x-2^x=5^x-4^x$

E_2) Fie $f(t)=t^x$, $f:[2,3]\to\mathbb{R} \Rightarrow \exists c_1\in(2,3)$ cu $f(3)-f(2)=f'(c_1)(3-2) \Rightarrow 3^x-2^x=f'(c_1)$

E_3) Fie $f(t)=t^x$, $f:[4,5]\to\mathbb{R} \Rightarrow \exists c_2\in(4,5)$ cu $f(5)-f(4)=f'(c_2)(5-4) \Rightarrow 5^x-4^x=f'(c_2)$

E_4) Ec. devine $f'(c_1)=f'(c_2)$ și cum $f'(t)=xt^{x-1}$
$\Rightarrow$ ec.: $x c_1^{x-1}=x c_2^{x-1}$ și $c_1\neq c_2$ deoarece $c_1\in(2,3)$, $c_2\in(4,5) \Rightarrow x\in\{0,1\}$

Exp 4: Arătați că a_n e convergent unde $a_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n$, $\forall n\geq 1$

E_1) monot.: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n =$
$=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)$

E_2) Fie $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ continuă pe $[n,n+1]$, derivabilă pe $(n,n+1) \Rightarrow \exists c_n\in(n,n+1)$ cu $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)(n+1-n) \Rightarrow \ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{c_n}$

E_3) $n<c_n<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{c_n}<\frac{1}{n} \Rightarrow$
$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)<0$
$\Rightarrow a_{n+1}-a_n<0 \Rightarrow a_n \searrow$ (1)

E_4) mărg.: $a_n \searrow \Rightarrow a_n\leq a_1 \Rightarrow a_n\leq 1$

E_5) trebuie să găsim $a_n\geq\dots$, din ineg $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$ folosim $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$
$n=1 \Rightarrow \ln 2-\ln 1<1$
$n=2 \Rightarrow \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$
$\dots$
$n=n \Rightarrow \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$
"+" $\Rightarrow \ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \mid -\ln n$
$\ln(n+1)-\ln n<a_n$ și cum $\ln(n+1)>\ln n$
$\Rightarrow a_n>0$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow a_n$ mărg

E_6) Din a_n monot și mărg $\Rightarrow$ convergent

DISCUȚIA NUMĂRULUI DE RĂDĂCINI REALE FOLOSIND ȘIRUL LUI ROLLE

E_1) se aduce ec. la forma $f(x)=0$ unde în expresia lui $f(x)$ apare m ca termen liber (independent de x)

E_2) calculăm $f'(x)$ în care nu trebuie să apară m, rezolvăm $f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots$ rădăcini

E_3) calculăm limitele la capetele lui f și $f(x_1), f(x_2), \dots$ și facem tabelul de la Rolle

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		∞
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	$\lim_{x\to-\infty}$		$f(x_1)$		$f(x_2)$		$f(x_3)$		$\lim_{x\to\infty}$

E_4) facem tabel și toate expresiile ce conțin pe m de pe linia lui f

E_5) discutăm pe cazuri numărul de rădăcini (sau facem tabel de discuție pt nr. de rădăcini, dar elevii normali se încurcă la tabel)

Tabelul ar avea forma

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞	DISCUȚIE
$f(x)$	semne corespunzător							///////
$m\in(-\infty;x_1)$	semne corespunz.							nr. de rad și situare
$m=x_1$	semne corresp.							nr. de rad și situare
...	...							...

Obs: se precizează rād dublă, triplă, doar dacă f polinom și doar atunci verificăm ordinul de multiplicitate

---

Exp 1): Discutați nr. de rād $2x^3+3x^2=m$

E_1) $2x^3+3x^2-m=0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2-m$

E_2) $f'(x)=6x^2+6x$, $f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{sau} \\ x=-1 \end{cases}$

E_3)

x	$-\infty$		-1		0		∞
f'			0		0		
f	$-\infty$		$1-m$		$-m$		∞

Șirul lui Rolle: $(-;\ \operatorname{sgn}(1-m);\ \operatorname{sgn}(-m);\ +)$

E_4)

m					0		1		
$1-m$	+	+	+	+	+	0	−	−	−
$-m$	+	+	+	+	0	−	−	−	−

E_5)

x	$-\infty$		-1		0		∞	DISCUȚIE
$f(x)$	$-\infty$		$1-m$		$-m$		∞	///////
$m\in(-\infty;0)$	−	+	+	+				$x_1\in(-\infty;-1)$
$m=0$	−	+	0	+				$x_1\in(-\infty;-1)$, $x_2=0$
$m\in(0;1)$	−	+	−	+				$x_1\in(-\infty;-1)$, $x_2\in(-1;0)$, $x_3\in(0;\infty)$
$m=1$	−	0	−	+				$x_1=-1$, $x_2\in(0;\infty)$
$m\in(1;\infty)$	−	−	−	+				$x_1\in(0;\infty)$

Obs: Pt $m=0 \Rightarrow f(x)=2x^3+3x^2$, $f'(x)=6x^2+6x$

$\Rightarrow f'(0)=0$, $f''(x)=12x+6 \Rightarrow f''(0)\neq 0 \Rightarrow x=0$ rād de ord II

... de ord II ... x^2-1. $f'(x)=6x^2+6x$

Exp 2: $x^3+3x^2-mx+5=0$, m. rădăc. reale

E_1) $x_1=0$ nu e rād, $x^3+3x^2-mx+5=0 \mid :x\neq 0 \Rightarrow$

$x^2+3x-m+\frac{5}{x}=0$

E_2) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-m+\frac{5}{x}$

$f'(x)=2x+3-\frac{5}{x^2}=\frac{2x^3+3x^2-5}{x^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow$ Horner

$\Rightarrow (x-1)(2x^2+5x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \Delta<0 \end{cases}$

E_3)

x	$-\infty$		0		1		∞
f'			‖		0		
f	∞		$-\infty$ ‖ ∞		$9-m$		∞

Șirul Rolle: $(+;\ -\ \|\ +;\ \operatorname{sgn}(9-m);\ +)$

E_4)

m					9		
$9-m$	+	+	+	+	0	−	−	−	−

E_5)

x	$-\infty$		0		1		∞	DISCUȚIE
$f(x)$	∞	$-\infty$	‖	∞	$9-m$		∞	///////
$m\in(-\infty;9)$	+	−	‖	+	+		+	$x_1\in(-\infty;0)$
$m=9$	+	−	‖	+	0		+	$x_1\in(-\infty;0)$, $x_2=1$
$m\in(9;\infty)$	+	−	‖	+	−		+	$x_1\in(-\infty;0)$, $x_2\in(0;1)$, $x_3\in(1;\infty)$

Obs: unde e ‖ nu se consideră schimbare de semn

Obs 2: deoarece ec. inițială provenea din polinom $\Rightarrow$ pt $m=9$ avem $x_2=1$ poate fi multiplă și

$f(x)=x^3+3x^2-9x+5$, $f(1)=0$

$f'(x)=3x^2+6x-9$, $f'(1)=0$

$f''(x)=6x+6$, $f''(1)\neq 0 \Rightarrow x=1$ rād multiplă de ord II.