COMPARAREA VALORILOR FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE (N2)

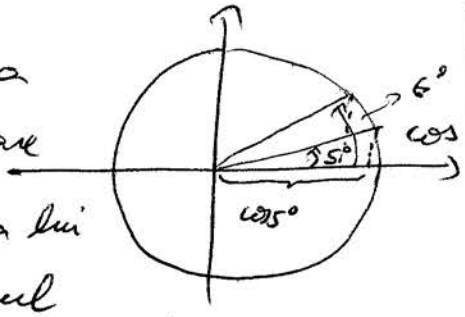
E_1) dacă argumentul este dat în grade, se compară din cercul trigonometric

E_2) dacă argumentul este dat în radiani, se face graficul funcției și se compară valorile funcției prin lungimea perpendicularei pe Ox de la Ox până la grafic, ținând cont bineînțeles de semn

---

Exp 1.: comparați $\cos 5^\circ$ cu $\cos 6^\circ$

E_1) valoarea corespunzătoare lui $\cos 5^\circ$ sau a lui $\cos 6^\circ$ este x-ul corespunzător unghiului



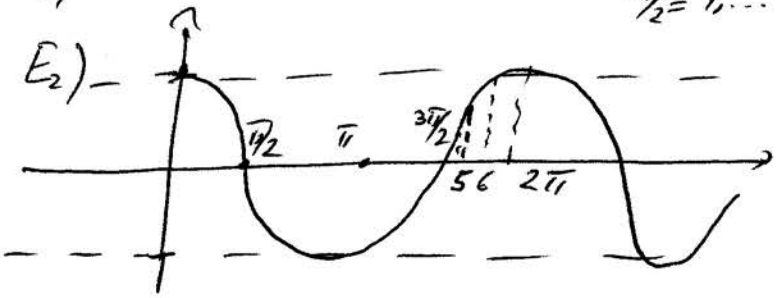
E_2) $\Rightarrow$ $\boxed{\cos 5^\circ > \cos 6^\circ}$

Exp 2: comparați $\cos 5$ cu $\cos 6$

E_1) trasăm graficul lui $\cos x$ ținând cont că $\pi \approx 3,14 \Rightarrow 2\pi \approx 6,28$

$3\pi/2 = 4,\ldots$

E_2)

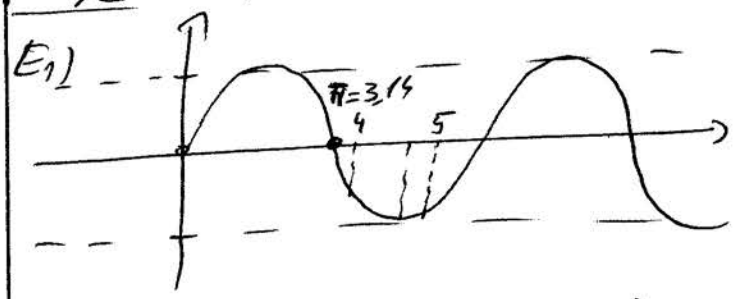


E_3) prin $x=5$ și $x=6$ ducem $\perp$ pe Ox și observăm că lungimea $\perp$ în $x=5$ este mai mică decât în $x=6$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sin 5 < \cos 6}$

Exp 3: Comparați $\sin 4$ cu $\sin 5$

E_1)



$\pi = 3,14$, $3\pi/2 = 4,71 \Rightarrow 5$ este mai aproape de $3\pi/2$ decât 4 de $3\pi/2$

$\Rightarrow$ lung perpend în $x=4$ este mai mică decât în $x=5$

dar ambele sunt negative

$\Rightarrow \sin 4 > \sin 5$

CALCULUL FUNCȚIILOR TRIG INVERSE

E_1) se folosește $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

E_2) se ține cont că $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos x \in [0; \pi]$

$\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{arcctg} x \in (0; \pi)$

E_3] valorile sunt exprimate în radiani

Exp: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ pt că $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\arccos 1 = 0$ pt că $\cos 0 = 1$

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ pt că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ pt că $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

PARITATEA, IMPARITATEA FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE INVERSE

(N2)

1) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

3) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

4) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

Obs1: dacă apar doi de „c" ca la arccos și arcctg, atunci formula este „π – funcția respectivă"

Obs2: dacă nu apar doi de „c" ci doar unul singur de la arc ca la arcsin și arctg, atunci formula este „– funcția respectivă"

Exp1: calculați $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

E_1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

E_2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = y$ cu $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E_3) deoarece $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$ valoare corectă

E_4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Exp2: calculați $\arccos(-1)$

E_1) $\arccos(-1) = \pi - \arccos 1$

E_2) $\arccos 1 = y$ cu $\cos y = 1$

E_3) deoarece $\cos 0 = 1$ și $0 \in [0, \pi]$

$\Rightarrow y = 0$ valoare corectă

E_4) $\arccos(-1) = \pi - 0 = \pi$

Exp3: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$

E_1) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3}$

E_2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = y$ cu $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$

E_3) deoarece $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ și $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$ valoare corectă

E_4) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

Exp4: $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$

E_1) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$

E_2) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = y$ cu $\operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$

E_3) deoarece $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ și $\frac{\pi}{6} \in (0, \pi)$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$ valoare corectă

E_4) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

ECUAȚII TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE (N3)

TIP I: $\boxed{\sin x = a}$

dacă $a \notin [-1;1] \Rightarrow x \in \emptyset$ (ec nu are soluții)

dacă $a \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$\boxed{x \in \{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

Obs.: dacă $a \in [-1;1] \Rightarrow$ soluția se mai poate scrie

$x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

TIP II: $\boxed{\cos x = a}$

dacă $a \notin [-1;1] \Rightarrow x \in \emptyset$ (ec nu are soluții)

dacă $a \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$\boxed{x \in \{\arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

TIP III: $\boxed{\operatorname{tg} x = a}$ are soluții $\forall x \in \mathbb{R}$ de forma $\boxed{x \in \{\operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

TIP IV: $\boxed{\operatorname{ctg} x = a}$ are soluții $\forall x \in \mathbb{R}$ de forma $\boxed{x \in \{\operatorname{arcctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

Obs.: dacă se cer soluții dintr-un interval, dăm lui k valori în jurul lui $k=0$ (de obicei $k=-1, k=0, k=1$ etc) astfel încât să nu avem nicio soluție pt prima valoare a lui k, apoi dăm valori lui k cât avem soluții și ne oprim atunci când iarăși nu avem soluții

Obs 2: dacă se cer soluții din $\mathbb{R}$, atunci nu mai dăm valori și soluția rămâne așa cum este

---

Exp 1: rezolvați în $\mathbb{R}$: $\sin x = \frac{1}{2}$

E1) $\frac{1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$x \in \{\arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E3) $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exp 2: rezolvați în $\mathbb{R}$: $\cos x = -\frac{1}{2}$

E1) $-\frac{1}{2} \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$x \in \{\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

E3) $x \in \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exp 3: rezolv în $[0; 2\pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

E1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1;1] \Rightarrow$ ec are soluții de forma

$x \in \{\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$

E3) $x \in \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$x \in \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E4) se cer soluții din $[0; 2\pi] \Rightarrow$ dăm valori

$k=-1 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3} - 2\pi;\ \frac{4\pi}{3} - 2\pi\} \cap [0; 2\pi] = \emptyset$

$k=0 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{4\pi}{3}\}$

$k=1 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3} + 2\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi\} \cap [0; 2\pi] = \{\frac{5\pi}{3}\}$

$k=2 \Rightarrow x \in \{-\frac{\pi}{3} + 4\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 4\pi\} \cap [0; 2\pi] = \emptyset$

Exp 4: rezolvați în $\mathbb{R}$: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

E1) $x \in \{\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

E3) $x \in \{-\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Exp 5: rezolvați în $[-2\pi; \pi]$: $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

E1) $x \in \{\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E2) dar, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

E3) $x \in \{\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E4) se cer soluții din $[-2\pi; \pi] \Rightarrow$ dăm valori

$k=-1 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} - \pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \{-\frac{\pi}{6}\}$

s-ar putea ca și valori ale lui k mai mici să avem soluții, studiem asta

$k=-2 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} - 2\pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \{-\frac{7\pi}{6}\}$

$k=-3 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} - 3\pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \emptyset$ deci valori mai mici ale lui k nu dau soluții

$k=0 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6}\} \cap [-2\pi; \pi] = \{\frac{5\pi}{6}\}$

$k=1 \Rightarrow x \in \{\frac{5\pi}{6} + \pi\} \cap [-2\pi; \pi] = \emptyset$ deci valori mai mari nu dau soluții

E5) S_f: $x \in \{-\frac{7\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\}$

Obs: s-a folosit în rezolvare:

a) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

b) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

c) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

d) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

REZOLVARE DE EC. TRIGONOMETRICE DATE PRIN EGALITĂȚI DE FUNCȚII

(N2)

TIP I: $\boxed{\sin f(x) = \sin g(x)}$, din care deducem $f(x) = g(x) + 2k\pi$ sau $f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$ (se reunesc soluțiile)
- se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie sub formă de reuniuni de mulțimi

TIP II: $\boxed{\cos f(x) = \cos g(x)}$, din care deducem $f(x) = g(x) + 2k\pi$ sau $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ (se reunesc soluțiile)
- se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie sub formă de reuniuni de mulțimi

TIP III: $\boxed{\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)} \Rightarrow$
$f(x) = g(x) + k\pi$, se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie ca și mulțime soluția

TIP IV: $\boxed{\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)} \Rightarrow$
$f(x) = g(x) + k\pi$, se găsește x în funcție de $k\pi$, se scrie ca și mulțime soluția

OBS 1: dacă se cere rezolvarea $\sin f(x) = \cos g(x)$, scriem una din funcții în funcție de cealaltă folosind $\sin f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$ sau că $\cos g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$

OBS 2: dacă se cere rezolvarea $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$, scriem una din funcții în funcție de cealaltă folosind $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right)$ sau că $\operatorname{ctg} g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$

OBS 3: dacă se cere rezolvarea unei ec. din tipurile de mai sus într-un interval, dăm lui k valori în jurul lui $k=0$ (de obicei $k=-1$, $k=0$, $k=1$ ...) și alegem doar soluțiile convenabile

---

Exemplu 1: rezolv în $\mathbb{R}$: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

E_1) $2x + \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ sau $2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

E_2) $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ sau $3x = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ sau $x = \frac{\frac{3\pi}{6} + 2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

E_3) $x \in \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplu 2: rezolv în $[0, \pi]$: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

E_1) $3x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sau $3x + \frac{\pi}{4} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$

E_2) $2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sau $4x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2}$ sau $x = \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}$

E_3) $x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

E_4) se cer sol din $[0, \pi]$, dăm valori

$k = -1 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} - \pi; -\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{2}\right\} \cap [0, \pi] = \emptyset$

$k = 0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8}; -\frac{\pi}{16}\right\} \cap [0, \pi] = \emptyset$

$k = 1 \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{16}\right\}$

$k = 2 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} + 2\pi; -\frac{\pi}{16} + \pi\right\} \cap [0, \pi] = \left\{\frac{15\pi}{16}\right\}$

$k = 3 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} + 3\pi; -\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right\} \cap [0, \pi] = \emptyset$

E_4) S_f: $x \in \left\{\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{16}; \frac{15\pi}{16}\right\}$

Exemplu 3: rezolv în $\mathbb{R}$: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

E_1) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right)$

E_2) ec. este: $\sin\left(-3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

E_3) $-3x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ sau $-3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$

E_4) $-4x = -\frac{2\pi}{4} + 2k\pi$ sau $-2x = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi$

E_5) $x = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{-4}$ sau $x = \frac{\pi + k\pi}{-2}$

E_6) $x \in \left\{\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplu 4: rezolv în $\mathbb{R}$: $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

E_1) $x + \frac{\pi}{3} = 3x + \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{12} - k\pi}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemplu 5: rezolv în $\mathbb{R}$: $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{4} = 3x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - k\pi$

$\Rightarrow 2x = -\frac{3\pi}{4} - k\pi \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

REZOLVAREA ECUAȚIILOR $a\cos x + b\sin x = c$ PRIN METODA UNGHIULUI DIN TABEL (N2)

- nu e metodă generală, însă e prima metodă care se încearcă deoarece e cea mai simplă

$E_1)$ $a\cos x + b\sin x = c \mid : \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$E_2)$ Dacă putem găsi un unghi φ din tabel astfel încât $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ și $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, metoda se poate folosi, altfel nu putem folosi această metodă

$E_3)$ Dacă există φ din tabel, ecuația devine:

$\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$E_4)$ dacă $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1] \Rightarrow$ ecuația nu are soluții

dacă $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1] \Rightarrow$ soluția este

$x-\varphi \in \{\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow x \in \{\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \varphi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \varphi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Ex1: Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -1$

$E_1)$ $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -1 \mid : \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$

$E_2)$ $\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$E_3)$ $-\frac{1}{2} \in [-1,1] \Rightarrow$ ec are soluție, $x-\frac{\pi}{6} \in \{\pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$E_4)$ $\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$E_5)$ $x-\frac{\pi}{6} \in \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$x \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$x \in \{\pi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

ECUAȚIA UNEI DREPTE PARALELE (N2) (PERPENDICULARE) CU AXELE DE COORDONATE

Ec. unei drepte paralele cu $x=a$ este $x=b, \forall b \neq a$

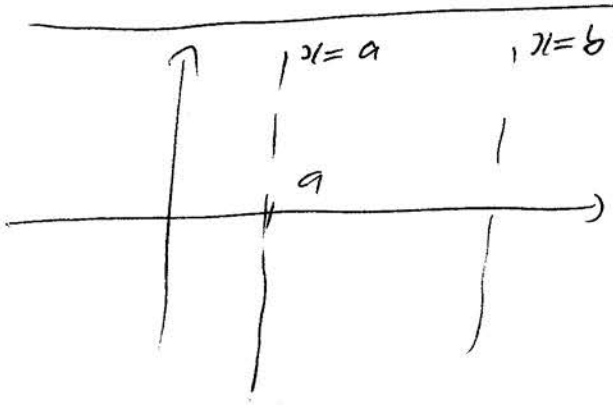
Ec unei drepte paralele cu Oy este $x=a, \forall a \neq 0$

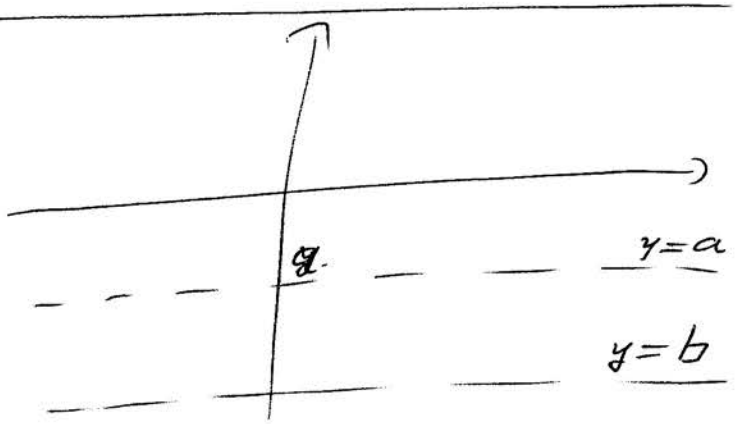
Ec unei drepte perpendiculare pe Oy este $y=a, \forall a \in \mathbb{R}$

Ec. unei drepte paralele cu $y=a$ este $y=b, \forall b \neq a$

Ec unei drepte paralele cu Ox este $y=a, \forall a \neq 0$

Ec unei drepte perpendiculare pe Ox este $x=a, \forall a \in \mathbb{R}$





Exp: găsiți ec dreptei: a) $\parallel$ cu Oy ce trece $A(1;4)$

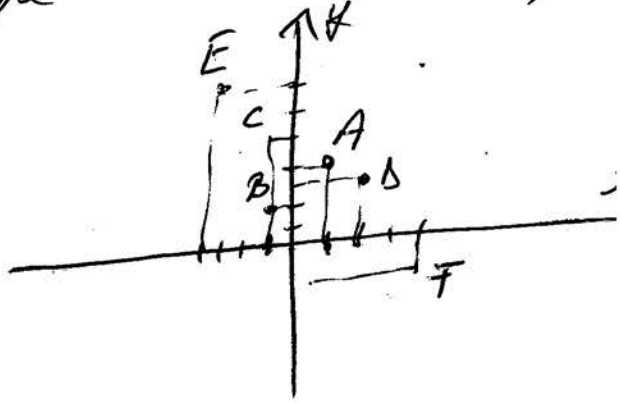
b) $\parallel$ cu Ox ce trece prin $B(-1;2)$

c) $\perp$ pe Oy ce trece $C(-1;5)$

d) $\perp$ pe Ox ce trece $D(2;3)$

e) $\parallel$ cu $x=3$ ce trece $E(-4;7)$

f) $\perp$ pe $x=3$ ce trece $F(4;-1)$



a) $x=x_A \Rightarrow x=1$

b) $y=y_B \Rightarrow y=2$

c) $y=y_C \Rightarrow y=3$

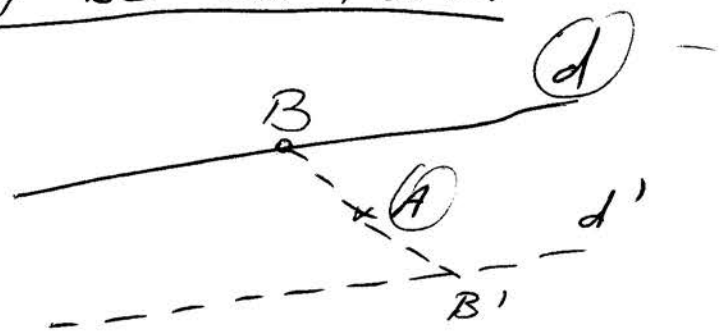
d) $x=x_D \Rightarrow x=2$

e) $x=x_E \Rightarrow x=-4$

-1

DETERMINAREA SIMETRICEI UNEI DREPTE FAȚĂ DE UN PUNCT (N2)

se știe ec. lui d, se știe coord lui A, se cere ec. lui d'

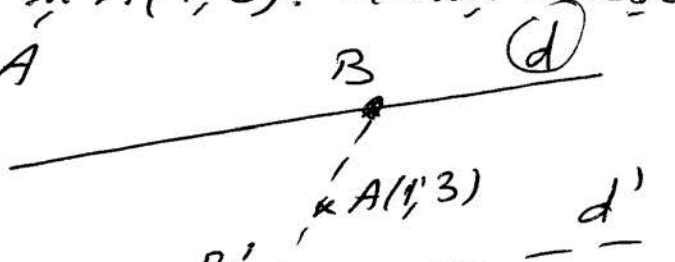


E_1) $d \parallel d' \Rightarrow m_d = m_{d'}$ iar $m_d = -\frac{a}{b}$

E_2) Fie $B \in d$ (dăm lui x o valoare, găsim y) și găsim coord lui B' folosind că A mijl lui BB'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'} \\ y_A = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'} \end{cases}$$

Ex 1.: Fie $d: 2x - y + 5 = 0$ și $A(1;3)$. Găsiți ecuația simetricei lui d față de A



E_1) $d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = m_d$

E_2) $m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-1} = 2 \Rightarrow m_{d'} = 2$

E_3) Fie $B \in d$, considerăm $x_B = 0 \Rightarrow -y + 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

$\Rightarrow B(0;5)$

E_6) A mijl lui BB' $\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \\ y_A = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{0 + x_{B'}}{2} \\ 3 = \frac{5 + y_{B'}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{B'} = 2$

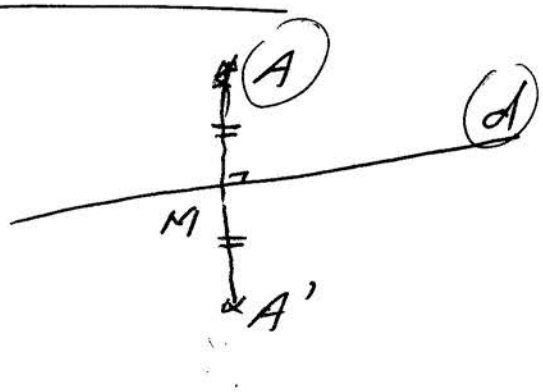
$y_{B'} = 1 \Rightarrow B'(2;1)$

E_7) Știm $B'(2;1)$, știm $m_{d'} = 2 \Rightarrow$ ec. d': $y - 1 = 2(x - 2)$

$\Rightarrow y - 1 = 2x - 4 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$

DETERMINAREA SIMETRICULUI UNUI PUNCT FAȚĂ DE O DREAPTĂ

(Nr 2)



Se știu coordonatele lui A și ecuația dreptei d, se cer coordonatele simetricului lui A față de d

---

E_1) pt a găsi simetricul față de d, construim perpendiculara din A pe d și o prelungim cu un segment congruent

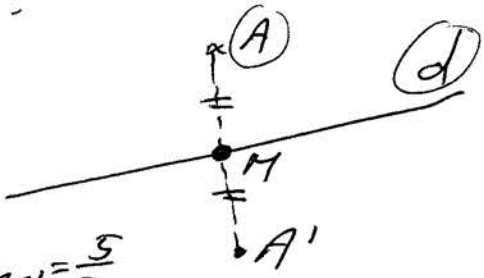
E_2) $AA' \perp d \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_d = -1$, $m_d = -\frac{a}{b} \Rightarrow$ găsim $m_{AA'}$

E_3) știm A, știm $m_{AA'} \Rightarrow$ ec. AA': $y - y_A = m_d(x - x_A) \Rightarrow$ ec. AA'

E_4) $AA' \cap d = \{M\}$, rezolvăm sistemul format din ec. celor două drepte

E_5) M mijl lui $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} \\ y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} \end{cases}$

Exp 2: Fie $A(1;5)$, $d: 2x + y - 5 = 0$, găsiți coordonatele simetricului lui A față de d



E_1) $AA' \perp d \Rightarrow m_{AA'} \cdot m_d = -1$

E_2) $d: 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{5} \Rightarrow m_{AA'} = \frac{5}{2}$

E_3) $A(1;5)$, $m_{AA'} = \frac{5}{2} \Rightarrow$ ec. AA': $y - y_{A'} = m_{AA'}(x - x_{A'}) \Rightarrow$

$y - 5 = \frac{5}{2}(x - 1) \mid \cdot 2 \Rightarrow 2y - 10 = 5x - 5 \Rightarrow 5x - 2y + 5 = 0$

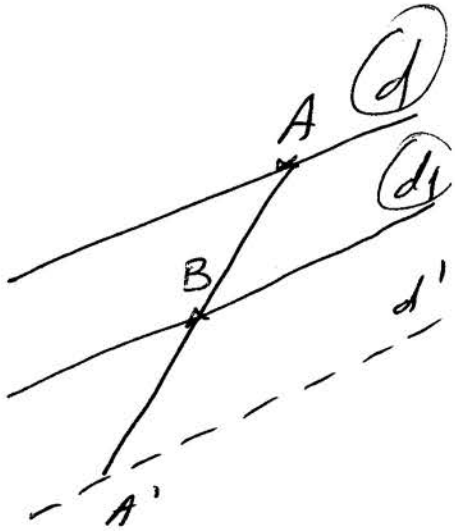
E_4) ca să găsim M, $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases} \mid \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow 9x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow 2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - \frac{10}{9} \Rightarrow y = \frac{35}{9} \Rightarrow M\left(\frac{5}{9}; \frac{35}{9}\right)$

E_5) M mijl $AA' \mid \frac{5}{9} = \frac{1 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = \frac{10}{9} - 1 \Rightarrow x_{A'} = \frac{1}{9}$ $A'\left(\frac{1}{9}; \frac{25}{9}\right)$

DETERMINAREA SIMETRICEI UNEI DREPTE FAȚĂ DE O DREAPTĂ PARALELĂ (Nr2)

- se știe ec. lui d și a lui d_1, se cere ec. simetricei lui d față de d_1

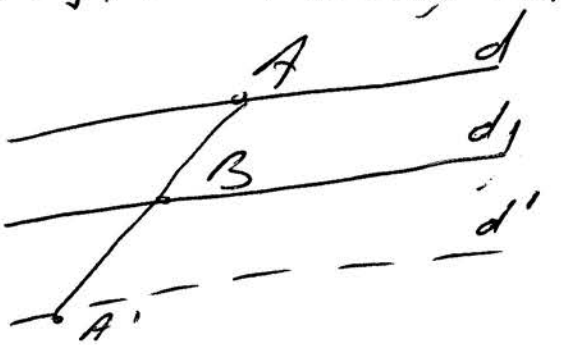


E_1) se calculează $m_d = -\frac{a}{b}$, $m_{d_1} = -\frac{a}{b}$ și dacă se obține $m_d = m_{d_1} \Rightarrow$ simetrica lui d față de d_1 va fi o dreaptă paralelă cu $d \Rightarrow m_{d'} = m_d \Rightarrow m_{d'}$

E_2) Fie $A \in d$ (dăm lui x o valoare, găsim y) și $B \in d_1$ (dăm lui x o valoare, găsim y) și folosim că B mijl lui $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow$ coord lui A'

E_3) știm A', știm $m_{d'} \Rightarrow$ ec. d': $y - y_{A'} = m_{d'}(x - x_{A'})$

Exemplu: Fie $d: 2x + 3y - 6 = 0$, $d_1: 4x + 6y + 1 = 0$. Găsiți ec. simetricei lui d față de d_1



E_1) $m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$; $m_{d_1} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow d \parallel d_1 \Rightarrow d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = -\frac{2}{3}$

E_2) Fie $A \in d$, fie $x_A = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow A(0; 2)$

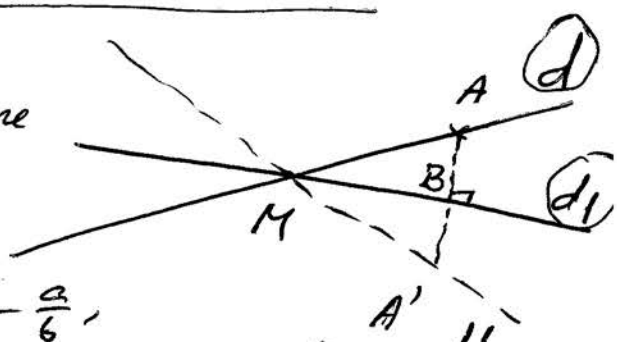
Fie $B \in d_1$, $x_B = 0 \Rightarrow y_B = -\frac{1}{6} \Rightarrow B(0; -\frac{1}{6})$

E_3) B mijl lui $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = \frac{0 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 0 \\ -\frac{1}{6} = \frac{2 + y_{A'}}{2} \Rightarrow -1 = 6 + 3y_{A'} \\ y_{A'} = -\frac{7}{3} \end{array}$

$\Rightarrow A'(0; -\frac{7}{3})$

$\ldots$ v. $\frac{x}{2} = -\frac{2}{3}(x - 0) \mid \cdot 3 \Rightarrow 3y + 7 = -$

DETERMINAREA SIMETRICEI UNEI DR FAȚĂ DE O DREAPTĂ NEPARALELĂ (N2)



-se știe ec. lui d și a lui d_1, se cere ec. simetricei lui d față de d_1

E_1) se calculează $m_d = -\frac{a}{b}$, $m_{d'} = -\frac{a}{b}$, se arată că $m_d \neq m_{d_1}$. Știm d, știm d_1 ⇒ sistem ⇒ (M)

E_2) Fie $A \in d$, găsim ec. perpendicularei din A pe d_1 astfel: $m_{d_1} = -\frac{a}{b}$, $AB \perp d_1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{d_1} = -1 \Rightarrow m_{AB}$, apoi ec. AB cu $y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$, apoi $AB \cap d_1 = \{B\}$ și B mijl AA' ⇒ coord. lui A'

E_3) știm M, știm A' ⇒ ec. MA' cu determinant

Exp: Fie $d: 2x + y - 4 = 0$, $d_1: 3x + 2y - 7 = 0$, găsiți ec. simetricei lui d față de d_1



E_1) $m_d = -\frac{2}{1}$, $m_{d_1} = -\frac{3}{2}$ ⇒ d_1 și d_2 nu sunt ∥ ⇒ sunt concurente, găsim pct lor de intersecție rezolvând sistemul

E_2) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Big| \cdot(-2) \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow M(1; 2)$

E_3) Găsim un punct $A \in d$, fie $x_A = 0 \Rightarrow y_A = 4 \Rightarrow A(0; 4)$

E_4) $AB \perp d_1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{d_1} = -1$, $m_{d_1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_d = \frac{2}{3} \Rightarrow$

ec AB: $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 3y - 12 = 2x \Rightarrow 2x - 3y + 12 = 0$

E_5) nr a găsi coord lui B, sistem $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix}$

$13x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{13}$

$3 \cdot (-\frac{3}{13}) + 2y = 7 \Big| \cdot 13 \Rightarrow -9 + 26y = 91 \Rightarrow 26y = 100 \Rightarrow y = \frac{50}{13}$

$B(-\frac{3}{13}; \frac{50}{13})$ și B mijl AA' $\Rightarrow -\frac{3}{13} = \frac{0 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = -\frac{6}{13}$, $y_{A'} = \frac{4}{1}$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$ — ecuația ...