PROPRIETĂȚI ALE RADICALILOR (N2)

a) $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$

b) $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$

d) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \cdot m]{x^m}$

e) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

f) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

g) $x^{2k} = y^{2k} \Rightarrow x = \pm y$

h) $x^{2k+1} = y^{2k+1} \Rightarrow x = y$

Exp 1: $\sqrt{x^2} = 5$, $x = ?$

$\sqrt{x^2} = 5 \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$

Exp 2: $\sqrt[3]{x^3} = 5$, $x = ?$

$\sqrt[3]{x^3} = 5 \Rightarrow x = 5$

Exp 3: $x^6 = 64$, $x = ?$

$x^6 = 64 \Rightarrow x^6 = 2^6 \Rightarrow x = \pm 2$

Exp 4: $x^5 = 32$, $x = ?$

$\ldots^5 = \ldots^5 \Rightarrow x = 2$

CONJUGAT, TIPURI DE CONJUGAT (N2)

NUMĂR	CONJUGAT	REZULTAT
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$\sqrt[7]{a^2}$	$\sqrt[7]{a^5}$	a
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$a-b$
$a-\sqrt{b}$	$a+\sqrt{b}$	a^2-b
* $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a-b$
* $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a+b$

Ex.: Rationalizați: a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$ d) $\frac{1}{2\sqrt[3]{7}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ h) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

a) $\frac{\sqrt{5}\cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{7}\cdot 1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

c) $\frac{\sqrt[7]{2^4}\cdot 1}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{\sqrt[7]{2^4}}{2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{7^2}\cdot 1}{2\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{2\cdot 7} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{14}$

e) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4}$

f) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{}$

h) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{8-2}$

CUM ARĂTĂM CĂ UN NUMĂR COMPLEX ESTE REAL SAU CĂ ESTE PUR IMAGINAR (N2)

1) $z \in \mathbb{R} \hookrightarrow$ (z real) $\begin{cases} \text{met I}: & b=0 \\ \text{met II}; & \bar{z}=z \end{cases}$

2) $z \in \mathbb{R}^* \cdot i \hookrightarrow$ (z pur imaginar) $\begin{cases} \text{met I}: & \begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \text{met II}: & \begin{cases} z \neq 0 \\ \bar{z}=-z \end{cases} \end{cases}$

Exp 1: arătați că $z \in \mathbb{R}$ unde $z=(3+2i)^n+(3-2i)^n$

E_1) nu putem calcula z, deci nu putem folosi met I, adică nu putem arăta că $b=0$

E_2) arătăm că $\bar{z}=z$

$\bar{z}=\overline{(3+2i)^n+(3-2i)^n}=$

$=\overline{(3+2i)^n}+\overline{(3-2i)^n}=$

$=(\overline{3+2i})^n+(\overline{3-2i})^n=$

$=(3-2i)^n+(3+2i)^n=z$

E_3) din $\bar{z}=z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Exp 2: arătați că $z \in \mathbb{R}^* \cdot i$, unde $z=(5-7i)^n-(5+7i)^n$

E_1) nu putem calcula z, deci nu putem arăta că $a=0$

E_2) arătăm că $\bar{z}=-z$ și că $z \neq 0$

E_3) $\bar{z}=\overline{(5-7i)^n-(5+7i)^n}=$

$=\overline{(5-7i)^n}-\overline{(5+7i)^n}=$

$=(\overline{5-7i})^n-(5+7i)^n=$

$=(5+7i)^n-(5-7i)^n=-z$

E_4) arăt. că $z \neq 0$ prin (R.A.)

Pp. $z=0 \Rightarrow (5-7i)^n=(5+7i)^n$

$\Rightarrow \left(\frac{5-7i}{5+7i}\right)^n=1 \Rightarrow \left(\frac{(5-7i)^2}{25+49}\right)^n=1$

$\Rightarrow \left(\frac{25-70i-49}{74}\right)^n=1$, U.O.

E_5) deci, $z=-\bar{z}$ și $z \neq 0 \Rightarrow z$ pur imaginar

Exp 3.: $a \in \mathbb{R}$, $a=?$ dacă $\frac{a+i}{2+i} \in \mathbb{R}$

E_1) Fie $z=\frac{a+i}{2+i}=\frac{(a+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=$

$=\frac{2a-ai+2i+1}{4+1}=\frac{2a+1}{5}+\frac{2-a}{5}i$

E_2) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2-a}{5}=0 \Leftrightarrow a=2$

met II: folosim că $\bar{z}=z$

$\bar{z}=z \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{a+i}{2+i}\right)}=\frac{a+i}{2+i} \Leftrightarrow$

$\frac{\overline{a+i}}{\overline{2+i}}=\frac{a+i}{2+i} \Leftrightarrow \frac{a-i}{2-i}=\frac{a+i}{2+i}$

$\Leftrightarrow (a-i)(2+i)=(a+i)(2-i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a+ai-2i+1=2a-ai+2i+1$

$\Leftrightarrow 2ai-4i=0 \Leftrightarrow (2a-4)i=0$

$\Leftrightarrow a=2$

FORMA TRIGONOMETRICĂ A NR. COMPLEXE (N2)

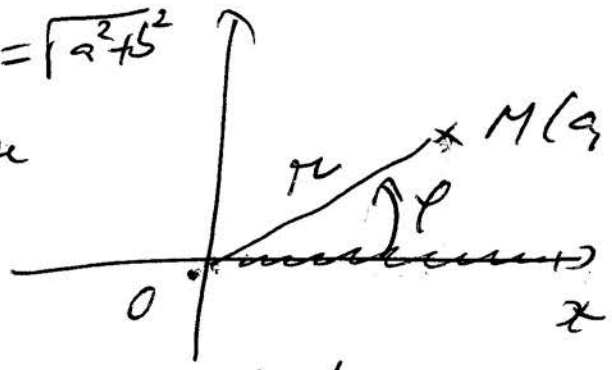
$z = a + bi$ formă algebrică

se cere $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, formă trigonometrică

$\varphi \in [0; 2\pi)$

$E_1)$ $M(0,0) \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow r = 0$, φ oarecare



$E_2)$ $M \in$ unei axe

$\Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$, φ se găsește direct

$E_3)$ $M \in$ Cadranelor $\Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$ iar

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + k\pi$, $k=0$ dacă $M \in$ Cd I

$k=1$ dacă $M \in$ Cd II ∪ Cd III

$k=2$ dacă $M \in$ Cd IV

Exp 1; $z = -3i$

$M(0;-3) \in Oy-$



$r = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3$

$M \in Oy$ negativ $\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

Exp 2; $z = -1 + i\sqrt{3}$

$M(-1;\sqrt{3}) \in$ Cd II $\Rightarrow r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + k\pi \Rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}$

$/ \cdot (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

OPERAȚII CU NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ

(N2)

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

$(z_1)^n = (r_1)^n(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1))$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1))$

Obs 1: dacă $z = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow$
$z^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ (adică $r=1$)

Obs 3.: dacă rezultatele pentru argumentul numerelor complexe obținute ca rezultat nu sunt în $[0; 2\pi)$, reducem argumentul la $[0; 2\pi)$ prin adunare sau scădere de multipli de 2π

Obs 3: dacă $z = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \Rightarrow$
$z = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ și aplicăm formulele anterioare

---

Ex 1: $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$z_2 = 3(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$. Să se:

a) $z_1 \cdot z_2$; b) $\frac{z_1}{z_2}$;

c) $(z_1)^{23}$

---

a) $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3(\cos(\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}))$

$= 6(\cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6})$

Dar, $\frac{13\pi}{6} \notin [0; 2\pi)$ și $\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ 12 & 2 \\ =1 & \end{array}$

$\Rightarrow \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{6} + 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi)) =$

$= 6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}))$

$= \frac{2}{3}(\cos(-\frac{3\pi}{6}) + i\sin(-\frac{3\pi}{6})) =$

$= \frac{2}{3}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$

Dar, $-\frac{\pi}{2} \notin [0; 2\pi) \Rightarrow$ adunăm multipli de 2π și cum $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2} \in [0; 2\pi) \Rightarrow 2\pi$ e OK

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos(-\frac{\pi}{2} + 2\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{2} + 2\pi)) =$

$= \frac{2}{3}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

c) $(z_1)^{23} = 2^{23}(\cos(23\cdot\frac{5\pi}{6}) + i\sin(23\cdot\frac{5\pi}{6}))$

$= 2^{23}(\cos\frac{115\pi}{6} + i\sin\frac{115\pi}{6})$

Cum $\frac{115\pi}{6} \notin [0; 2\pi)$, $\begin{array}{r|l} 115 & 6 \\ 6 & 19 \\ 55 & \\ 54 & \\ =1 & \end{array}$

$\Rightarrow \frac{115\pi}{6} = 19\pi + \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow (z_1)^{23} = 2^{23}(\cos(\frac{\pi}{6} + 19\pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + 19\pi))$

$= 2^{23}(\cos(\frac{\pi}{6} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \pi)) =$

$= 2^{23}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

RĂDĂCINILE DE ORDIN n (N2)

DIN NR. COMPLEX

Se cere rezolvarea lui $z^n = \alpha$

E_1) $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ adică îl scriem pe α trigonometric

E_2) Aplic formula rădăcinilor

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

$$k = \overline{0, n-1}$$

Ex 1: $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$

E_1) $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$ scriu trig $\Rightarrow \alpha = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$E_2)\ z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)$$

$$k = \overline{0,2}$$

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$

RĂDĂCINILE DE ORDIN n ALE UNITĂȚII

Se cere rezolvarea ecuației

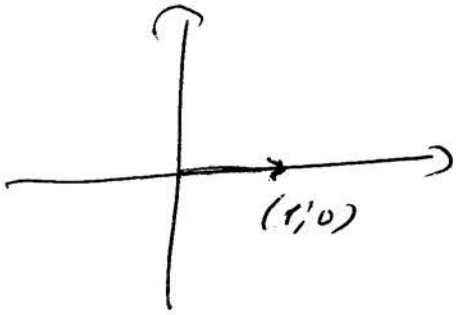
$$z^n = 1$$

$\Rightarrow$ formula rădăcinilor este

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

demonstrație:

$E_1)\ \alpha = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$



$E_2)\ z^n = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Exp: se cere rezolvare $z^4 = 1$

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}, \quad k = \overline{0,3}$$

$$\Rightarrow z_k = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}, \quad k = \overline{0,3}$$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = - - - -$

$= - - n - -$, nu se pot calcula

RĂDĂCINILE PUR COMPLEXE DE (N2) ORDIN 3 ALE UNITĂȚII (RESPECTIV ALE LUI $\alpha=-1$)

$(\alpha^3=1, \alpha\notin\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\alpha^2+\alpha+1=0) \Leftrightarrow (\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2})$

dem:

$\alpha^3=1 \Leftrightarrow \alpha^3-1=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha=1\in\mathbb{R}$, k.o. sau $\alpha^2+\alpha+1=0$ ok

$\alpha^2+\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$(\alpha^3=-1, \alpha\notin\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\alpha^2-\alpha+1=0) \Leftrightarrow (\alpha_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2})$

dem:

$\alpha^3=-1 \Leftrightarrow \alpha^3+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha=-1\in\mathbb{R}$ k.o. sau $\alpha^2-\alpha+1=0$ ok

$\alpha^2-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Exp 1: dacă $z^2-z+1=0$, calculați $N=z^{10}+\frac{1}{z^{10}}$

$E_1)$ $z^2-z+1=0 \Leftrightarrow (z^3=-1, z\notin\mathbb{R})$

$E_2)$ $N=(z^3)^3\cdot z+\frac{1}{(z^3)^3\cdot z}=-z+\frac{1}{-z}=$

$=-(z+\frac{1}{z})=-\frac{z^2+1}{z}$

$E_3)$ din $z^2-z+1=0 \Rightarrow z^2+1=z$

$\Rightarrow N=-\frac{z^2+1}{z}=-\frac{z}{z}=-1$

Exp 2: dacă $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, să se

$N=z^8-\frac{1}{z^7}$

$E_1)$ $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (z^3=1, z\neq 1)$

$E_2)$ $N=(z^3)^2\cdot z^2-\frac{1}{(z^3)^2 z}=z^2-\frac{1}{z}=$

$=\frac{z^3-1}{z}=\frac{0}{z}=0$

REZOLVAREA ECUAȚIILOR DE FORMA $z^n = \bar{z}$ (N2)

Se cere $z^n = \bar{z}$, se cer rădăcinile

E_1) Se trece la modul $\Rightarrow |z^n| = |\bar{z}|$

E_2) Se folosește $|z^n| = |z|^n$ și $|\bar{z}| = |z|$

E_3) Obținem $|z|^n = |z| \Rightarrow |z|(|z|^{n-1} - 1) = 0$

$\Rightarrow$ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ sau $|z|^{n-1} = 1 \Rightarrow |z| = \pm 1$, dar $|z| > 0 \Rightarrow |z| = 1$

E_4) Din $|z| = 1$ și din $z^n = \bar{z} \mid \cdot z \Rightarrow$

$z^{n+1} = z \cdot \bar{z}$. Dar, $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$

E_5) $z^{n+1} = 1 \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$, $k = \overline{0, n}$

Exp: Rezolv. $z^3 = \bar{z}$

E_1) $z^3 = \bar{z} \mid |\cdot| \Rightarrow |z^3| = |\bar{z}| \Rightarrow |z|^3 = |z| \Rightarrow$

$\Rightarrow |z|(|z|^2 - 1) = 0$ $\Leftarrow$ $|z| = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$ sau $|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = \pm 1$ și $|z| > 0 \Rightarrow |z| = 1$

E_2) $z^3 = \bar{z} \mid \cdot z \Rightarrow z^4 = z \cdot \bar{z} \Rightarrow z^4 = |z|^2 \Rightarrow z^4 = 1$

$z_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$, $k = \overline{0, 3}$ și calculăm rădăcinile

EC. IRAȚIONALE ÎN CARE APAR 2 RADICALI DE TIPUL $\sqrt[n]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}=\alpha$

(N2)

E_1) eventuale condiții (sau dacă nu punem condiții, obținem soluții posibile pe care trebuie să le verificăm în ec. inițială)

E_2) $\sqrt[n]{f(x)}=u \overset{()^n}{\Rightarrow} x=\dots$ în funcție de u

$\sqrt[m]{g(x)}=v \overset{()^m}{\Rightarrow} x=\dots$ în funcție de v

E_3) egalând valorile lui x găsim o ec. cu u și v înlocuim în ec inițială $\Rightarrow$ $u+v=\alpha \Rightarrow$ a doua ec în funcție de u și v

E_4) avem sistem, găsim pe u sau pe v (pe cea mai simplă), apoi găsim valori posibile pt x

E_5) x verifică în ec. inițială

Ex 1: rezolvați:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$$

E_1) $\sqrt{x-1}=u \overset{()^2}{\Rightarrow} x-1=u^2 \Rightarrow x=u^2+1$

$\sqrt{x+3}=v \overset{()^2}{\Rightarrow} x+3=v^2 \Rightarrow x=v^2-3$

E_2) egalând $x \Rightarrow u^2+1=v^2-3$

înlocuim în ec $\Rightarrow u+v=2$

E_3) avem sistemul

$$\begin{cases} u^2+1=v^2-3 \\ u+v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=-4 \\ u=2-v \end{cases}$$

$\Rightarrow (2-v)^2-v^2=-4 \Rightarrow$

$4-4v+v^2-v^2=-4 \Rightarrow -4v=-8$

$\Rightarrow v=2$

E_4) dar, $x=v^2-3 \Rightarrow x=4-3=1$

sol posibilă, o verificăm

$\sqrt{1+3}=2 \Rightarrow 0+2=2$ OK

Ex 2: rezolvați

$$\sqrt{2-x}+\sqrt[3]{2x-3}=1$$

E_1) $\sqrt{2-x}=u \Rightarrow 2-x=u^2 \Rightarrow x=2-u^2$

$\sqrt[3]{2x-3}=v \Rightarrow 2x-3=v^3 \Rightarrow x=\frac{v^3+3}{2}$

E_2) egalând $x \Rightarrow 2-u^2=\frac{v^3+3}{2}$ și din ec $\Rightarrow u+v=1 \Rightarrow$ sistemul

$$\begin{cases} 4-u^2=v^3+3 \\ u+v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^3+u^2=1 \\ u=1-v \end{cases}$$

$\Rightarrow v^3+(1-v)^2=1 \Rightarrow v^3+1-2v+v^2=1$

$\Rightarrow v^3+v^2-2v=0 \Rightarrow v(v^2+v-2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1=0 \\ v^2+v-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=1 \\ v_3=-2 \end{cases}$

E_3) $v_1=0$ și $x=\frac{v^3+3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$ posibilă, o verif. $\Rightarrow \sqrt{2-\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{2\cdot\frac{3}{2}-1}=1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{2}=1$ fals

E_4) $v_2=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \sqrt{0}+\sqrt[3]{1}=1$ OK

E_5) $v_3=-2 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{-8}=1$ KO

S_f: $x=2$

EC. EXPONENȚIALE DE TIPUL (N2)

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot (ab)^x + \gamma \cdot b^{2x} = 0$$

E_1) Se împarte ecuația prin cea mai mică putere (sau cea mai mare putere)

E_2) se notează, se obț o ec. de gr II $\Rightarrow t_{1,2}$

E_3) se obține x doar dacă $t > 0$, pentru $t < 0$ $\Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

Obs.: Dacă x nu poate fi găsit direct (prin scriere cu puteri la aceeași bază), atunci logaritmăm în baza 10

Exemplu: $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$

E_1) $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0 \mid : 4^x$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0$

E_2) not $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

E_3) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \mid \lg(\dots) \Rightarrow x \lg \frac{3}{2} = \lg 2 \Rightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{3}{2}}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

$S_p: x \in \left\{0; \frac{\lg 2}{\lg \frac{3}{2}}\right\}$

TEMĂ: a) $25^x - 3 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0$ b) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

c) $25^x - 6 \cdot 15^x + 8 \cdot 9^x = 0$ d) $4^x + 3^x \cdot 2^{x+1} = 3 \cdot 9^x$

e) $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 28 \cdot 9^x$ f) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$

EC. LOGARITMICE CARE SE REZOLVĂ PRIN NOTAȚII

(N2)

E_1) se pun eventuale condiții (dacă nu punem condiții, soluțiile posibile se verifică în ec inițială)

E_2) se știe cont că $\log_b^2 A = (\log_b A)^2$ și înainte de a face notații, scriem sub forma cea mai simplă

Exp 1.: $\log_2^2(x+1) - \log_2(x+1) - 2 = 0$

E_1) ec. devine

$(\log_2(x+1))^2 - \log_2(x+1) - 2 = 0$

E_2) not $\log_2(x+1) = t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$

E_3) cazI: $t_1 = 2 \Rightarrow \log_2(x+1) = 2$

$\Rightarrow x+1 = 2^2 \Rightarrow x = 3$ sol posibilă,

o vf $\Rightarrow (\log_2 4)^2 - \log_2 4 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4 - 2 - 2 = 0$ OK.

E_4) cazII: $t_2 = -1 \Rightarrow \log_2(x+1) = -1$

$\Rightarrow x+1 = 2^{-1} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

sol posibilă, o vf

$\left(\log_2 \frac{1}{2}\right)^2 - \log_2 \frac{1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$1 + 1 - 2 = 0$ OK

$S_o: x \in \{3; -\frac{1}{2}\}$

Exp 2: $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$

E_1) $\lg^2(x^3) = (\lg x^3)^2 =$

$= (3\lg x)^2 = 9(\lg x)^2 \Rightarrow$ ec.

$2 \cdot 9(\lg x)^2 - 3\lg x - 1 = 0$

E_2) not $\lg x = t \Rightarrow$

$18t^2 - 3t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2 \cdot 18} = \frac{3 \pm 9}{36} \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{3} \\ \searrow -\frac{1}{6} \end{matrix}$

E_3) $t_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lg x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{3}}$

sol posibilă, o înlocuim $\Rightarrow$

$18\left(\lg 10^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 3\lg 10^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 18 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$ OK

E_4) $t_2 = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lg x = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{6}}$

sol posibilă, o înlocuim $\Rightarrow$

$18\left(\lg 10^{-\frac{1}{6}}\right)^2 - 3\lg 10^{-\frac{1}{6}} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 18 \cdot \frac{1}{36} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ OK

E_5) $S_o: x \in \{10^{\frac{1}{3}}; 10^{-\frac{1}{6}}\}$

ECUAȚII CARE SE POT REZOLVA FOLOSIND MONOTONIA

(N2)

E_1) Se notează fiecare termen care depinde de x cu o funcție: $f_1(x), f_2(x) \ldots$, se trece term. liber în dreapta

E_2) Se precizează monotonia fiecărei funcții (vedem ce se întâmplă atunci când crește x, dacă valorile funcției cresc sau scad)

E_3) Se folosesc proprietățile:

a) $f_1, f_2 \nearrow \Rightarrow (f_1+f_2) \nearrow$ b) $f_1, f_2 \searrow \Rightarrow (f_1+f_2) \searrow$

c) $f_1 \nearrow \Rightarrow (-f_1) \searrow$ d) $f_1 \searrow \Rightarrow (-f_1) \nearrow$

E_4) Se obține o f s monotonă = număr $\Rightarrow$ ec. are <u>cel mult</u> o soluție. Se intuiește soluția deci acea soluție va fi unică

<u>Exp 1</u>.: Rezolvați ec.: $2^x = 3-x$

E_1) $2^x = 3-x \Leftrightarrow 2^x + x = 3$

E_2) $f_1(x) = 2^x$ e $\nearrow$, $f_2(x) = x \nearrow \Rightarrow (f_1+f_2)(x) \nearrow$

$\Rightarrow$ ec. $2^x + x = 3$ are cel mult o soluție $\Rightarrow x=1$ sol unică

E_3) Obs. că $x=1$ soluție

<u>Exp 2</u>: Rezolvați ec.: $3^x + 4^x = 5^x$

E_1) ec. $\Leftrightarrow 3^x + 4^x - 5^x = 0$ și $f_1(x) = 3^x \nearrow$, $f_2(x) = 4^x \nearrow$ și $f_3(x) = 5^x \nearrow$ dar nu știm monotonia lui $3^x+4^x-5^x$, căutăm altă metodă

E_2) $3^x + 4^x = 5^x \mid :5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ și $f_1(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \searrow$, $f_2(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x \searrow$, $\Rightarrow (f_1+f_2)(x) \searrow \Rightarrow$ ec. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ are Obs. că $x=2$ verifică $\Rightarrow x=2$ sol. unică

PROPRIETĂȚI ALE COMBINĂRILOR

a) $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$ (formula combinărilor complementare)

Exp: $C_8^3 = C_8^{8-3} \Rightarrow C_8^3 = C_8^5$

b) $\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}}$ (relație de recurență)

Exp: $C_8^3 = C_7^3 + C_7^2$

c) $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \Rightarrow \boxed{k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}}$

Exp: $3 C_8^3 = 8 C_7^2$

PROBLEME DE NUMĂRARE REZOLVATE PRIN „NUMĂRARE"

(N2)

Exp 1: câte fct $f:\{1;2;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$ există?

$f(1)\to 5$ ✓ sunt independente și
$f(2)\to 5$ ✓ din regula produsului
$f(3)\to 5$ ✓ $\Rightarrow 5\cdot 5\cdot 5 = 5^3 = 125$

Exp 2: câte fct $f:\{1;2;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$ cu $f(1)=f(5)$ există?

Exp 1: $f(1)\to 5$ ✓ $\Rightarrow$ sunt independente
$f(2)\to 5$ ✓ doar $f(1)$ și $f(2)\Rightarrow$
$f(5)=f(1)$ $5\cdot 5 = 25$ funcții

Exp 3: câte fct $f:\{3;4;5;6\}\to\{1;5\}$ surjective există?

$f(3)=1, f(4)=1, f(5)=1 \to f(6)=5 \to 1$ fct
$f(3)=1, f(4)=1, f(5)=5 \to f(6)\to 2$ ✓ $\to 2$ fct
$f(3)=1, f(4)=5, f(5)=1 \to f(6)\to 2$ ✓ $\to 2$ fct
$f(5)=5 \to f(6)\to 2$ ✓ $\to 2$ fct
$f(3)=5; f(4)=1 \to \begin{cases} f(5)=1 \to f(6)\to 2 \text{ fct} \\ f(5)=5 \to f(6)\to 2 \text{ fct} \end{cases}$
$f(4)=5 \to \begin{cases} f(5)=1 \to f(6)\to 2 \text{ fct} \\ f(5)=5 \to f(6)=1 \to 1 \text{ fct} \end{cases}$

În total $\Rightarrow$ 14 funcții

Exp 4: câte fct $f:\{1;2;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$ injective sunt?

$f(1)\to 5$ ✓; $f(2)\to 4$ ✓; $f(5)\to 3$ ✓ indep
$\Rightarrow 5\cdot 4\cdot 3 = 60$ fct

Exp 5: câte fct $f:\{1;4;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$

$f(1)=3, \begin{cases} f(4)=4, f(5)\to 3 \text{ ✓} \\ f(4)=5, f(5)\to 2 \text{ ✓} \\ f(4)=6, f(5)\to 2 \text{ ✓} \end{cases}$ 6 fct; 3 fct; 1 fct

Exp 6: câte nr. de 3 cifre au exact 2 cifre egale?

E_1) cazul I: $\overline{aab} \to \begin{matrix} a\to 9 \text{ ✓} \\ b\to 9 \text{ ✓ (} b\to a\text{)} \end{matrix} \Big\} \to 81$

cazul II: $\overline{aba} \to \begin{matrix} a\to 9 \text{ ✓} \\ b\to 9 \text{ ✓} \end{matrix} \Big\} \to 81$

cazul III: $\overline{abb} \to \begin{matrix} a\to 9 \text{ ✓} \\ b\to 9 \text{ ✓} \end{matrix} \Big\} \to 81$

cu regula sumei $\to 81+81+81 = 243$

Exp 7: câte nr. de 3 cifre există?

$\overline{abc}$, $a\to 9$ ✓, $b\to 10$ ✓, $c\to 10$ ✓ indep
$\Rightarrow 9\cdot 10\cdot 10 = 900$

Exp 8: câte nr. de 3 cifre distincte $\exists f(?)$

$\overline{abc}$, $a\to 9$ ✓, $b\to 9$ ✓, $c\to 8$ ✓ $\Rightarrow 9\cdot 9\cdot 8 = 648$ nr.

Exp 9: câte nr. de 4 cifre distincte de forma $\overline{abcd}$ cu $a+b=7$ și d par?

$a+b=7$ și a,b cifre $\Rightarrow a\in\{1;2;\dots;7\}$ și $b\in\{6;5;\dots;0\}$
dar $b=7-a \Rightarrow b$ depinde de a
așadar, $\begin{matrix} a\to 7 \text{ ✓} \\ b=7-a \\ c\to 10 \text{ ✓} \\ d\to 5 \text{ ✓} \end{matrix} \Big\} \Rightarrow 7\cdot 10\cdot 5 = 350$ nr. (sunt independente)

Exp 10: Fie $A=\{1;2;3\}$, găsiți nr. elemente $A\{(a,b)\}$

$\begin{matrix} a\to 3 \text{ ✓} \\ b\to 3 \text{ ✓} \end{matrix} \to$ independ $\Rightarrow 3^2 = 9$ elemente

Exp 11: Găsiți câte nr. de 3 cifre sunt divizibile cu 6 sau cu 8

$M_6 = \{102; 108; \dots; 996\} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$
$\Rightarrow 996 = 102 + (n-1)\cdot 6 \Rightarrow n_1 = 150$
$M_8 = \{104; 112 \dots; 992\} \Rightarrow 992 = 104 + (n-1)\cdot 8$
$\Rightarrow n_2 = 112$
Dar, multiplii lui 24 îi numărăm de 2 ori, deci îi scădem o dată
$M_{24} = \{120; 144; \dots; 984\} \Rightarrow n_3 = 37$
$150 + 112 - 37 = 225$

FORMULE PENTRU PROBLEME DE NUMĂRARE

notăm $\text{card}A=a$, $\text{card}B=b$

1) nr. de fct oarecare $f: A\to B$ este b^a

2) nr. de fct injective $f: A\to B$ este A_b^a

3) nr. de fct bijective $f: A\to B$ este $P_b=b!$ și $\exists$ doar dacă $a=b$

4) nr. de fct $\nearrow$ $f: A\to B$ este C_b^a

nr. de fct $\searrow$ $f: A\to B$ este C_b^a

nr. de fct $\nearrow$ monot $f: A\to B$ este $2C_b^a$

5) nr. de submț ordon cu k elem ale o mț cu n elemente este C_n^k

6) nr. total de submț ale unei mț cu n elemente este 2^n

7*) nr. de numere cu k cifre distincte ale o mț cu n elem este A_n^k (dar aici e mai sigur cu abcd ...)

8*) nr. de numere cu k cifre (nu neapărat distincte) ale o mț cu n elem este n^k (dar mai bine le numărăm)

9) nr. mț ordonate $\nearrow$ sau $\searrow$ cu k elem ale o mț cu n elemente este C_n^k (sunt mai puține decât A_n^k)

10) nr. de fct surjective $f: A\to B$ este $b^a - C_b^1(b-1)^a + C_b^2(b-2)^a - C_b^3(b-3)^a + \dots + (-1)^{b-1}C_b^{b-1}$

Obs.: deși $\exists$ formulă ale fct surjective, e mai practic să deducem numărul lor

---

Exp 1: se cere nr. de fct oarecare $f: A\to B$ cu $A=\{1;2;5\}$ și $B=\{4;6\}$

nr. de fct $b^a = 2^3 = 8$

Exp 2: se cere nr. de fct inj $f: \{1;2\}\to\{3;4;5\}$

nr. de fct $A_b^a = A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$

Exp 3: nr. de fct bijec $f: \{1;2;3\}\to\{5;6;7\}$

nr. de fct $P_3 = 3! = 6$

Exp 4: nr. de fct $\nearrow$ $f: \{1;2\}\to\{5;6;7\}$ este $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$

Exp 5: nr. de fct strict monotone $f: \{1;3;4\}\to\{5;6;7;8;9\}$ este $C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 4\cdot 5 = 20$

Exp 6: se cere nr. de submț cu 3 elem ale $A=\{1;2;3;4;5\} \Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

Exp 7: nr. total de submț ale mț $A=\{1;2;3;4;5\}$ este $2^5 = 32$

Exp 8: câte nr. de 2 cifre distincte se pot forma cu elem din $\{2;3;4;5;6\}$

mod I: $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4\cdot 5 = 20$

mod II: $\overline{ab} \to \begin{matrix} a\to 5\text{ v} \\ b\to 4\text{ v} \end{matrix}$ indep $\Rightarrow 5\cdot 4 = 20$

Exp 9: câte nr. de 2 cifre se pot forma cu elem din $\{2;3;4;5;6\}$

mod I: $5^2 = 25$

mod II: $\overline{ab}$ cu $a\to 5$ v, $b\to 5$ v ind $\Rightarrow 25$

Exp 10: câte triplete (a,b,c) cu $a<b<c$ și $a,b,c\in\{0;1;2;3;4;5\}$ sunt?

mod I: $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 20$

mod II: $a=0; b=1 \to c\to 4$ v $\to 4$ nr

$b=2 \to c\to 3$ v $\to 3$ nr

... : complicat

RANGUL CELUI MAI MARE TERMEN AL DEZVOLTĂRII (N2)

E_1) se știe (sau se deduce)

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

E_2) se știe că dacă $a, b > 0$ atunci în dezvoltarea $(a+b)^n$ termenii au ordinea $T_1 \le T_2 \le \dots \le T_k \le T_{k+1} \ge T_{k+2} \ge \dots \ge T_{n+1}$

$\Rightarrow T_{k+1}$ este cel mai mare termen

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{T_{k+1}}{T_k} \ge 1 \\ \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k} \ge 1 \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k}{k+1} \le 1 \end{cases}$$

(unde relația $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}$ se deduce din $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ prin înlocuirea lui k cu $k+1$)

E_3) rezolvăm cele 2 inecuații, obținem $k \in I_1 \cap I_2 \cap \mathbb{Z}$ și va ieși o singură valoare pt k întreagă $\Rightarrow k+1$ este rangul celui mai mare termen

Obs.: $\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_n^k a^{n-k} b^k \cdot b}{C_n^{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}} =$

$= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{n-k+1}} \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k}$

Obs2.: Din această relație, $k \to k+1$

$\Rightarrow \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-(k+1)+1}{k+1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

Exp.: Pt $(0,1+1)^{500}$, găsiți rangul celui mai mare termen al dezvoltării.

$$E_1) \begin{cases} \frac{T_{k+1}}{T_k} \ge 1 \\ \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k} \ge 1 \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k}{k+1} \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{0,1} \cdot \frac{500-k+1}{k} \ge 1 \\ \frac{1}{0,1} \cdot \frac{500-k}{k+1} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \cdot \frac{501-k}{k} \ge 1 \\ 10 \cdot \frac{500-k}{k+1} \le 1 \end{cases}$$

$$E_2) \begin{cases} 5010 - 10k \ge k \\ 5000 - 10k \le k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5010 \ge 11k \\ 4999 \le 11k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \le \frac{5010}{11} \\ k \ge \frac{4999}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \le 455,4 \\ k \ge 454,4 \end{cases}$$

$\Rightarrow k \in [454,4\dots ; 455,4\dots] \cap \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k = 455$

$\Rightarrow$ rangul este $k+1$ adică rangul este 456