CONDIȚIA CA 3 NUMERE REALE SĂ POATĂ FI LATURILE UNUI TRILUNGHI (*)

a, b, c pot fi lungimile laturilor unui Δ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$$

și intersectăm intervalele obținute (adică luăm doar valorile comune)

Exp.: Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă numerele 3, x respectiv 5 pot fi lungimile laturilor unui Δ

E_1) Cond.: $\begin{cases} 3 > 0,\ x > 0,\ 5 > 0 \\ 3 < x + 5 \\ x < 3 + 5 \\ 5 < 3 + x \end{cases}$

E_2) $3 > 0$ adev $\forall x \in \mathbb{R}$

$x > 0 \Rightarrow x \in (0; \infty) = I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = (0; \infty)}$

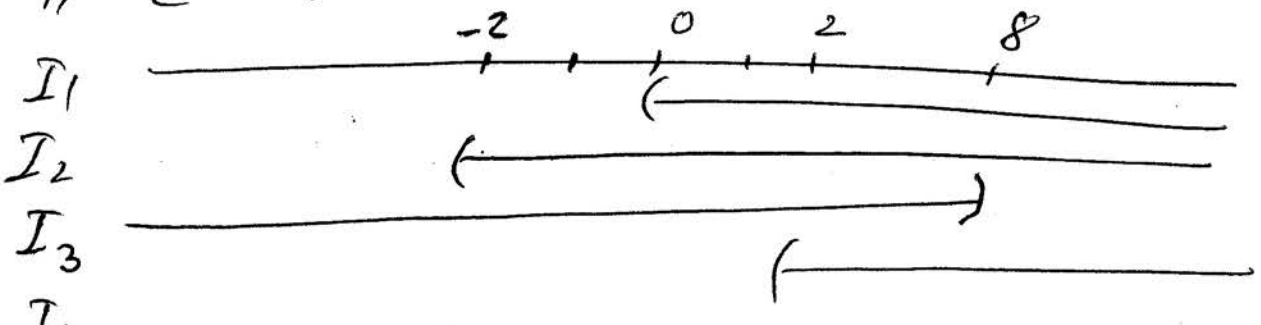
$5 > 0$ adev $\forall x \in \mathbb{R}$

E_3) $3 < x + 5 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow \boxed{x \in (-2; \infty) = I_2}$

$x < 3 + 5 \Rightarrow x < 8 \Rightarrow \boxed{x \in (-\infty; 8) = I_3}$

$5 < 3 + x \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \boxed{x \in (2; \infty) = I_4}$

E_4) $I_C = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4$



$\Rightarrow x \in (2; 8)$

TEOREMA LUI THALES. TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII

TEOREMA LUI THALES

În $\triangle ABC$, dacă

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



Obs.: e valabilă și reciproc, dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$

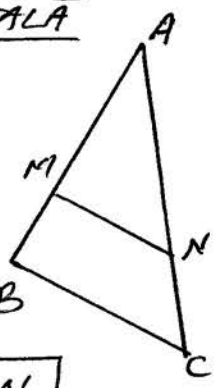
TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII

În $\triangle ABC$, dacă

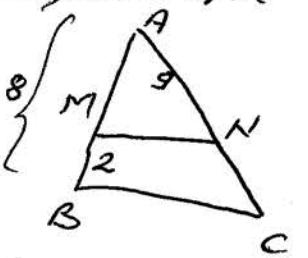
$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

Obs.: teorema e utilizată sub forma

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Exp 1: În $\triangle ABC$ cu $MN \parallel BC$, știm că $AB = 8$, $MB = 2$, $AN = 9$; se cere lungimea lui NC

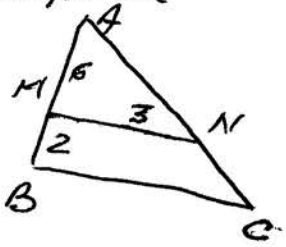


E1) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{THALES}}$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{9}{NC} \Rightarrow 6NC = 18$$

$$\Rightarrow NC = 3$$

Exp 2: În $\triangle ABC$ cu $MN \parallel BC$, $AM = 6$, $MB = 2$, $MN = 3$; se cere lungimea lui BC



E1) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{T la}}$ $\triangle AMN \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{BC} \Rightarrow 6BC = 24$$

$$\Rightarrow BC = 4$$

EXPRIMAREA UNUI VECTOR ÎN FUNCȚIE DE ALȚI VECTORI DAȚI (N2)

E1) se identifică punctele din relațiile din ipoteză

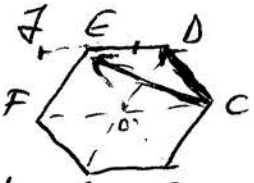
E2) se exprimă vectorii folosind regula triunghiului sau a paralelogramului

Obs.: dacă avem hexagon regulat, este util să ducem diagonalele, să găsim punctul lor de intersecție și să exprimăm vectorii ceruți în funcție de un vector ce trece prin acest punct

Ex.: Fie ABCDEF un hexagon regulat și punctele G, H, I, J, K și L astfel încât: $\overrightarrow{AG}=-3\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}=2\cdot\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KF}$ și $\overrightarrow{FA}=-4\overrightarrow{FL}$. Exprimați în funcție de $\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{CE}$ vectorii:

a) $\overrightarrow{BJ}$ b) $\overrightarrow{KG}$ c) $\overrightarrow{HI}$

d) $\overrightarrow{LE}$



a) $\overrightarrow{BJ}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$

din $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EJ}$ rezultă că avem J, E, D coliniare în ordinea J–E–D și $DE=2EJ$

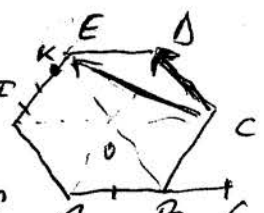
$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=$

$=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})+\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})$

$=2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CE}$

$=(2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD})+(-\overrightarrow{CE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CE})$

$$\boxed{\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}}$$



b) $\overrightarrow{KG}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$

din $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KF}\Rightarrow$ E, F, K coliniare

din $\overrightarrow{AG}=-3\overrightarrow{GB}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{BG}$

$\Rightarrow$ A, B, G coliniare în ordinea A–B–G

$\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}+(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG})$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE})+2\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})$

$=\frac{1}{4}\cdot 2\overrightarrow{ED}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{CE}$

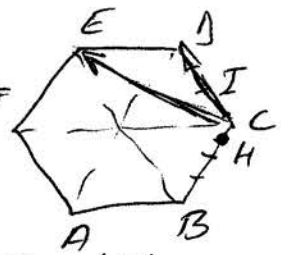
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD})+\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CE}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$=-\frac{5}{4}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{KG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{5}{4}\overrightarrow{CE}}$$

c) $\overrightarrow{HI}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$



$\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{HC}\Rightarrow$ B, H, C col.

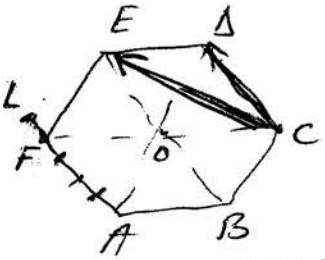
$\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\Rightarrow$ C, D, I

$\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}+\frac{\overrightarrow{CD}}{3}$

$=\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$

d) $\overrightarrow{LE}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$



$\overrightarrow{FA}=-4\overrightarrow{FL}\Rightarrow\overrightarrow{FA}=4\overrightarrow{LF}$

$\Rightarrow$ A, F, L coliniare

$\overrightarrow{LE}=\overrightarrow{LF}+\overrightarrow{FE}=$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{FA}+(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CD}$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}+2(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CD}=$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\Rightarrow$

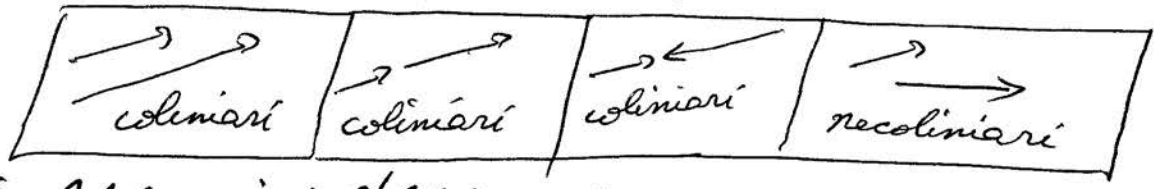
$$\overrightarrow{LE}=\frac{11}{4}\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CE}$$

COLINIARITATEA A 2 VECTORI (N2)

met I: se alege o bază formată din 2 vectori necoliniari, se exprimă vectorii noștri în funcție de vectorii din bază și se arată că au coordonatele proporționale

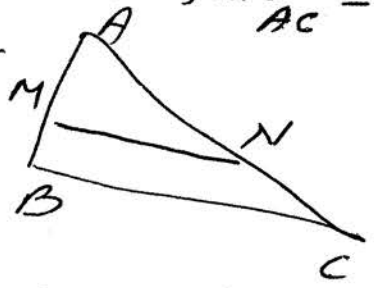
met II: se folosește că ($\vec{u}, \vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*$ cu $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$)

Obs.: vectori coliniari sau vectori paraleli este același lucru



Ex.: Fie $\triangle ABC$ și $M \in (AB)$ cu $\frac{AM}{MB} = 3$, $N \in (AC)$ cu $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$.

Arătați vectorial că $\vec{MN}$ și $\vec{BC}$ coliniari



E_1) Fie baza $(\vec{AB}, \vec{AC})$ formată din 2 vectori necoliniari

E_2) Exprimăm vectorii $\vec{MN}$ și $\vec{BC}$ în funcție de vectorii din bază

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$

E_3) Din $\frac{AM}{MB} = 3 \Rightarrow \frac{AM}{AM+MB} = \frac{3}{3+1} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{4} AB$

E_4) Deoarece $\vec{AM}$ și $\vec{AC}$ au același sens $\Rightarrow \vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{MA} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$

E_5) $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AN = \frac{3}{4} AC$, vectorii $\vec{AN}$ și $\vec{AC}$ au ac sens

$\Rightarrow \vec{AN} = \frac{3}{4}\vec{AC}$

E_6) $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} \Rightarrow \boxed{\vec{MN} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}}$

E_7) În $\triangle ABC$, $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$

E_8) $\vec{MN} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$; $\boxed{\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC}}$ și

$\frac{-\frac{3}{4}}{-1} = \frac{\frac{3}{4}}{1}$ adev $\Rightarrow$ coef proporționale $\Rightarrow \vec{MN}, \vec{BC}$ coliniare

$\Rightarrow \vec{BC} = -\frac{4}{3} \cdot \vec{MN} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*$ cu $\vec{BC} = k\vec{MN} \Rightarrow$ coliniare

COLINIARITATEA A 3 PUNCTE FOLOSIND COLINIARITATEA VECTORILOR

(N2)

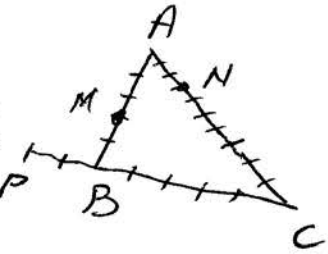
Se cere: A, B, C coliniare

E_1) Se arată că doi din vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sau oricare alți doi vectori formați cu aceste 3 puncte sunt coliniari

E_2) deoarece acei 2 vectori sunt coliniari și au un punct comun $\Rightarrow$ punctele A, B, C sunt coliniare

---

Ex.: în ΔABC, fie punctele M, N, P cu $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{7}{10}\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{PC}$. Arătați vectorial că M, N și P coliniare



E_1) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$ $\Rightarrow A, M, B$ coliniare în ordinea $A-M-B$

E_2) $\overrightarrow{CN} = \frac{7}{10}\overrightarrow{NA} \Rightarrow C, N, A$ coliniare în ordinea $A-N-C$

E_3) $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{CP} \Rightarrow$ B, P și C coliniare în ordinea $P-B-C$

E_4) Fie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ bază, exprimăm pe $\overrightarrow{PM}$ și $\overrightarrow{PN}$ în funcție de vectorii din bază și arătăm că au coordonatele proporționale

E_5) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$

$= \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PM} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

E_6) $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN} =$

$= \frac{7}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{7}{10}\overrightarrow{CA} =$

$= \frac{7}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \frac{7}{10}\overrightarrow{AC} =$

$= -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{7}{10}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{PN} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{AC}}$

E_7) verific dacă

$\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10^2}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ adev

$\Rightarrow \overrightarrow{PM}$ și $\overrightarrow{PN}$ coliniari $\Rightarrow$

E_8) Dar, P comun

$\Rightarrow$ punctele P, M și N coliniare

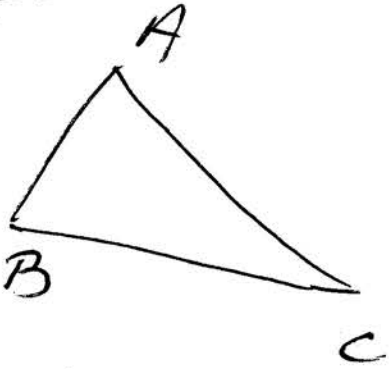
PROPRIETĂȚI ALE VECTORILOR NECOLINIARI

$\vec{u}, \vec{v}$ necoliniari $\Rightarrow$ din relația

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow a = 0 \text{ și } b = 0$$

Obs.: Dacă avem o relație între 3 vectori, o exprimăm doar în funcție de maxim 2 vectori folosind regula Δ sau a paralelogramului

Exp.: Dacă $(m-1)\vec{AB} + n\vec{AC} = \vec{BC}$, se cere $m = ?$, $n = ?$ în ΔABC



E_1) Orice relație vectorială poate fi exprimată în funcție de cel mult 2 vectori necoliniari (cu un vect comun)

E_2) $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ $\Rightarrow$ relația din ip

$$(m-1)\vec{AB} + n\vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$(m-1)\vec{AB} + n\vec{AC} + \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$$

$$(m-1+1)\vec{AB} + (n-1)\vec{AC} = \vec{0}$$

$$m\vec{AB} + (n-1)\vec{AC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ și } n = 1$$

Funcții complementare

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

Exp: $\sin 21^\circ = a$, x care $\cos 69^\circ = ?$

$\cos 69^\circ = \cos(90^\circ - 21^\circ) = \sin 21^\circ = a$

Exp 2: $\sin 13^\circ = a$, x care $\operatorname{tg} 77^\circ$

E1) $\operatorname{tg} 77^\circ = \dfrac{\sin 77^\circ}{\cos 77^\circ} =$

E2) $\sin 77^\circ = \sin(90^\circ - 13^\circ) = \cos 13^\circ$

E3) $\sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ = 1 \Rightarrow a^2 + \cos^2 13^\circ = 1$

$\cos^2 13^\circ = 1 - a^2 \Rightarrow \cos 13^\circ = \pm\sqrt{1-a^2}$

E4) $13^\circ \in$ CdI $\Rightarrow \cos 13^\circ > 0 \Rightarrow \cos 13^\circ = \sqrt{1-a^2}$

$\sin 13^\circ = a \Rightarrow \operatorname{tg} 77^\circ = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

SUBSTITUȚIA UNIVERSALĂ (N2)

a) $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; b) $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; c) $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

---

a) E_1) $\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) \overset{\sin 2a}{=\!=} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \quad (*)$$

E_2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

E_3) înloc în $(*) \Rightarrow \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

b) $\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) \overset{\cos 2a}{=\!=} \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$

E_2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

E_3) $\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}$

c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \ldots = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

TRANSFORMAREA PRODUSELOR ÎN SUME (N2)

a) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$ c) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

b) $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$ d) $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

---

dem.:

a) să apară Sd intercalate ne gândim la $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ trebuie să rămână

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\sin x \cos y \Rightarrow$ adunăm

"+": $\sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\sin x \cos y \Rightarrow \sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

b) să apară Sd intercalate, ne gândim la $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ trebuie să rămână

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\cos x \sin y \Rightarrow$ scădem

"−": $\sin(x+y)-\sin(x-y) = 2\cos x \sin y \Rightarrow \cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

c) să apară același tip de Sd, ne gândim la $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ trebuie să rămână $\cos x \cos y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\Rightarrow$ adunăm

"+": $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x \cos y \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

d) să apară același tip de Sd, ne gândim la $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ trebuie să rămână

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\sin x \sin y$, scădem

"−": $\cos(x+y)-\cos(x-y) = -2\sin x \sin y \Rightarrow$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$

TRANSFORMAREA SUMELOR ÎN PRODUS (N2)

a) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	c) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
b) $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$	d) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Dem.:

a) $\sin x+\sin y=\sin(a+b)+\sin(a-b)=$

$=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)+(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=2\sin a\cos b$

Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}$

„+": $2a=x+y\Rightarrow a=\frac{x+y}{2}$ „-": $2b=x-y\Rightarrow b=\frac{x-y}{2}$

Înlocuim $\Rightarrow \sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

b) $\sin x-\sin y=\sin(a+b)-\sin(a-b)=$

$=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)-(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=2\cos a\sin b$

Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$

$\Rightarrow \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

c) $\cos x+\cos y=\cos(a+b)+\cos(a-b)=$

$=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=2\cos a\cos b$

Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$

$\Rightarrow \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

d) $\cos x-\cos y=\cos(a+b)-\cos(a-b)=$

$=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)-(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=-2\sin a\sin b$

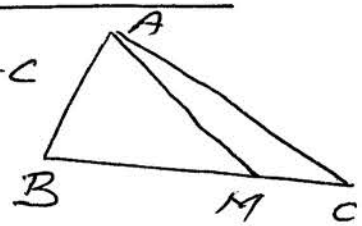
Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$

$\Rightarrow \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

RELAȚIA LUI STEWART. LUNGIMEA MEDIANEI (N2)

Relația lui Stewart

Dacă $B-M-C$ coliniare și A un punct exterior, atunci are loc:

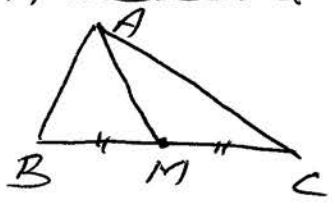


$$AB^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BM = BM \cdot MC \cdot BC$$

Lungimea medianei

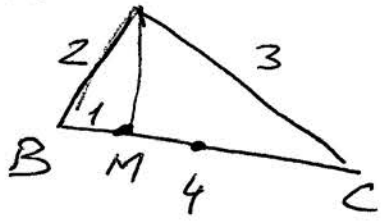
În $\triangle ABC$ cu AM mediană are loc

$$AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$



, analog pentru celelalte mediane

Exp: în $\triangle ABC$ avem $AB=2$, $AC=3$, $BC=4$ și fie $M \in (BC)$ cu $BM=1$, calculați lungimea lui AM A



E_1) $BC=4$ și $BM=1 \Rightarrow MC=3$

E_2) din STEWART $\Rightarrow$

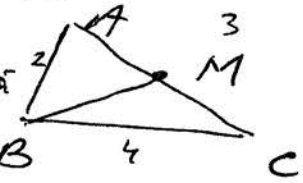
$AB^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BM = BM \cdot MC \cdot AC$

$\Rightarrow 4 \cdot 3 - AM^2 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \cdot 4$

$\Rightarrow 12 - 4AM^2 + 9 = 12$

$4AM^2 = 9 \Rightarrow AM^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{2}$

Exp: în $\triangle ABC$, $AB=2$, $AC=3$, $BC=4$. Se cere lungimea medianei din B



E_1) BM mediană

$$\Rightarrow BM^2 = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$$

$$\Rightarrow BM^2 = \frac{2(4+16)-9}{4} = \frac{31}{4}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{\sqrt{31}}{2}$$