EXTRAGERE RADICAL (N2)

E_1) se împarte numărul în grupe de 2 cifre de la virgulă în stg și în dreapta, grupe de după virgulă, punem 0

E_2) se găsește cel mai mare număr al cărui pătrat să nu depășească primul grup de cifre (putem radical din primul grup de cifre)

E_3) nr. obținut se ridică la pătrat, se scade din prima grupă, se coboară următoarea grupă $\Rightarrow N_1$

E_4) se dublează rezultatul, se completează cu o cifră a.î. înmulțit cu aceeași cifră să dea cel mai mare număr $\leq N_1$

E_5) se completează rezultatul cu acea cifră, se scade numărul obținut prin înmulțire din N_1

E_6) se repetă procedeul

Exp.: $\sqrt{3'45'78,90}$

1^2

245

224

$=2178$

1825

$=35390$

33381

$=2009$

$185,9$

$29 \cdot 9 = 261$

$28 \cdot 8 = 224$

$365 \cdot 5 = 1825$

$366 \cdot 6 = 2196$

$3709 \cdot 9 = 33.381$

Exp 2: Calculați $\sqrt{851,4}$ cu 2 zecimale

$\sqrt{851,4000}$

2^2

451

441

$=1040$

581

$=45900$

42789

$29,17$

$49 \cdot 9 = 441$

$582 \cdot 2 = 1164$

$581 \cdot 1 = 581$

$5829 \cdot 9 = 52461$

$5828 \cdot 8 = 46624$

$5837 \cdot 7 = 42789$

FOLOSIREA PROPRIETĂȚILOR DE DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{Z}$

(N2)

E_1) se folosesc: a) $\left.\begin{matrix} A/B \\ A/C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A/(B+C)$ și $A/(B-C)$

b) $A/A, \forall A \in \mathbb{Z}$ c) $A/B \Rightarrow A/(nB), \forall n \in \mathbb{Z}$

E_2) dacă se cer valori naturale ale fracției, se verifică din valorile întregi obținute pe cele care corespund

---

Ex.: Găsiți $A=\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3-3x-2}{2x+1} \in \mathbb{N}\}$

E_1) $\frac{x^3-3x-2}{2x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{2x+1 \mid x^3-3x-2}$

E_2) Dar, $2x+1 \mid 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \mid x^2(2x+1) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^3+x^2$

Cum $2x+1 \mid x^3-3x-2 \Rightarrow 2x+1 \mid 2(x^3-3x-2) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^3-6x-4$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+1 \mid (2x^3+x^2)-(2x^3-6x-4) \Rightarrow \boxed{2x+1 \mid x^2+6x+4}$

E_3) Deci, $2x+1 \mid x^2+6x+4 \Rightarrow 2x+1 \mid 2(x^2+6x+4) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^2+12x+8$

Dar, $2x+1 \mid 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \mid x(2x+1) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^2+x$

$\Rightarrow 2x+1 \mid (2x^2+12x+8)-(2x^2+x) \Rightarrow \boxed{2x+1 \mid 11x+8}$

E_4) Deci, $2x+1 \mid 11x+8 \Rightarrow 2x+1 \mid 2(11x+8) \Rightarrow 2x+1 \mid 22x+16$

Dar, $2x+1 \mid 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \mid 11(2x+1) \Rightarrow 2x+1 \mid 22x+11$

$\Rightarrow 2x+1 \mid (22x+16)-(22x+11) \Rightarrow 2x+1 \mid 5 \Rightarrow 2x+1 \in D_5$

E_5) $\Rightarrow 2x+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow x \in \{0; -1; 2; -3\}$ valori posibile pt că x trebuie să fie din $\mathbb{Z}$. Verificăm pt care din aceste valori $F(x)=\frac{x^3-3x-2}{2x+1} \in \mathbb{N}$

$x=0 \Rightarrow F(0)=\frac{-2}{1} \notin \mathbb{N}$, U.O.

$x=-1 \Rightarrow F(-1)=\frac{0}{-1}=0 \in \mathbb{N}$ OK

$x=2 \Rightarrow F(2)=\frac{0}{5} \in \mathbb{N}$ OK

$x=-3 \Rightarrow F(-3)=\frac{-20}{-5}=4$ OK

$\Rightarrow \boxed{A=\{-1; 2; -3\}}$

PROPRIETĂȚI ALE MODULELOR

(N2)

a) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ și } y = 0)$

d) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$, se verifică apoi

e) $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$, $\forall c > 0$

f) $|x| > c \Leftrightarrow (x < -c \text{ sau } x > c)$, $\forall c > 0$

g) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$, $\forall c > 0$

h) $|x| \geq c \Leftrightarrow (x \leq -c \text{ sau } x \geq c)$, $\forall c > 0$

i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

j) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Exp 1: Rezolvați ecuația:

$|2x-1| + |y-3| = -z^2$

E_1) $|2x-1| \geq 0$ și $|y-3| \geq 0$

$-z^2 \leq 0$

E_2) deci egalitate poate avea loc doar dacă $|2x-1| + |y-3| = 0$ și $-z^2 = 0$

E_3) $|2x-1| + |y-3| = 0$ și cum $|2x-1| \geq 0$ și $|y-3| \geq 0$, pt a avea loc egalitatea trebuie ca $|2x-1| = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ și $|y-3| = 0 \Rightarrow y = 3$

E_4) $-z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$

E_5) Așadar, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Exp 2: rezolvați ecuația:

$|1-2x| = |x+4|$

E_1) $|1-2x| = |x+4| \Rightarrow 1-2x = \pm(x+4)$

E_2) $1-2x = x+4 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$, ovf.

în ec $\Rightarrow |1+2| = |-1+4|$ adev $\Rightarrow x = -1$ ok

E_3) $1-2x = -(x+4) \Rightarrow 1-2x = -x-4$

$\Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$, ovf în ec.: $|-9| = |9|$

$x \in \{-1; 5\}$

Exp 3: Rezolvați $|2x-1| < 5$

E_1) $|2x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \mid +1$

$\Rightarrow -4 < 2x < 6 \mid :2 \Rightarrow -2 < x < 3$

$\Rightarrow x \in (-2; 3)$

Exp 4: Rezolvați $|-2x+3| \leq 7$

E_1) $|-2x+3| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq -2x+3 \leq 7 \mid -3$

$\Rightarrow -10 \leq -2x \leq 4 \mid \cdot(-1) \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 10 \mid :2$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in [-2; 5]$

Exp 5: Rezolvați $|3x+7| > 1$

E_1) $|3x+7| > 1 \Rightarrow 3x+7 < -1$ sau $3x+7 > 1$

$\Rightarrow 3x < -8$ sau $3x > -6 \Rightarrow$

$x < -\frac{8}{3}$ sau $x > -2 \Rightarrow$

$x \in (-\infty; -\frac{8}{3}) \cup (-2; \infty)$

Exp 6: Rezolvați $|-3x+9| \geq 3$

E_1) $|-3x+9| \geq 3 \Rightarrow -3x+9 \leq -3$ sau $-3x+9 \geq 3$

$\Rightarrow -3x \leq -12$ sau $-3x \geq -6$

$\Rightarrow 3x \geq 12$ sau $3x \leq 6 \Rightarrow$

$x \geq 4$ sau $x \leq 2$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 2] \cup [4; \infty)$

PARTE ÎNTREAGĂ. PARTE FRACȚIONARĂ

a) partea întreagă a lui x este primul întreg mai mic sau egal cu x. Se notează $[x]$ și evident $[x]$ este număr întreg

b) partea fracționară a lui x se notează $\{x\}$ și vom avea: $\{x\} = x - [x]$

Exp.: $[2,3] = 2$; $[-2,3] = -3$; $[5] = 5$; $[-5] = -5$

Exp 2: $\{2,3\} = 2,3 - [2,3] = 2,3 - 2 = 0,3$

$\{-2,3\} = -2,3 - [-2,3] = -2,3 - (-3) = -2,3 + 3 = 0,7$

$\{5\} = 5 - [5] = 5 - 5 = 0$

Obs 1: $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Obs. 2: $\{x\} \in [0;1)$ și $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Exp: Calculați $[\sqrt{2009}] + 3 \cdot \{-\frac{1}{3}\}$

Pt. a găsi $[\sqrt{2009}]$, e suficient să găsim primul întreg $\leq \sqrt{2009}$. Pentru asta, calculăm $40^2 = 1600$; $50^2 = 2500$; $45^2 = 2025$; $44^2 = 1936$

$\Rightarrow 1936 < 2009 < 2025 \Rightarrow 44^2 < 2009 < 45^2 \,/\sqrt{\cdots}$

$\Rightarrow 44 < \sqrt{2009} < 45 \Rightarrow [\sqrt{2009}] = 44$

$\{-\frac{1}{3}\} = -\frac{1}{3} - [-\frac{1}{3}] = -\frac{1}{3} - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow N = 44 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 44 + 2 = 46$

PROPRIETĂȚI PENTRU PARTE ÎNTREAGĂ ȘI PARTE FRACTIONARĂ

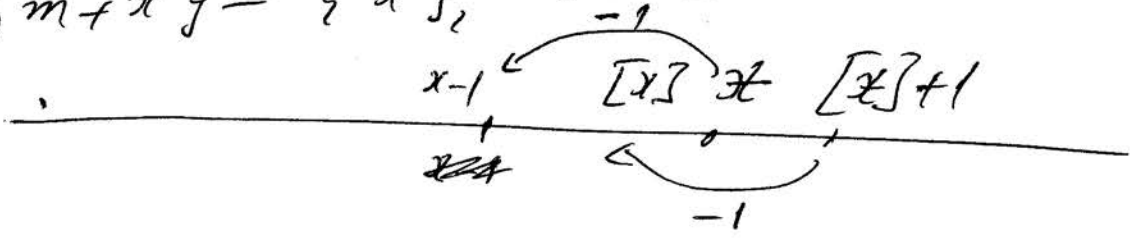
a) $[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$

b) $\{x\} = 0 \iff x \in \mathbb{Z}$

c) $[m+x] = m + [x], \ \forall m \in \mathbb{Z}$

d) $\{m+x\} = \{x\}, \ \forall m \in \mathbb{Z}$

e)



$\Rightarrow x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$

$\Rightarrow$ se pot deduce: e$_1$) situarea părții întregi față de numere: $x - 1 < [x] \leq x$

e$_2$) situarea numărului față de partea întreagă, $[x] \leq x < [x]+1$

Obs: În cazul general, nu este proprietate că $[x+y] = [x] + [y]$, deși se poate numeri ca pentru anumite valori ale lui x și y să fie adevărată.

Exp: $[2+3,5] = 2 + [3,5] = 2+3 = 5$

Exp2: $x = 1,3 \Rightarrow$ $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$ este echivalentă cu $0,3 < 1 \leq 1,3 < 2$ adev.

ECUAȚII CU PARTE ÎNTREAGĂ DE TIPUL $[f(x)]=g(x)$

E_1) notăm $[f(x)]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow g(x)=k\Rightarrow$ îl găsim pe x în funcție de k

E_2) folosim proprietatea

$$[f(x)]\le f(x)<[f(x)]+1$$

$$\Rightarrow k\le f(x)\le k+1$$

E_3) îl înlocuim pe x găsit la E_1) în funcție de $k\Rightarrow k\le$ „Sct de k" $\le k+1\Rightarrow$ sistem de inecuații de unde găsim $k\in I$

E_4) $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in I\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{\dots\}=M$

E_5) pentru a-l găsi pe x, folosim exprimarea lui x în funcție de k de la E_1

Exp: $\left[\frac{2x-7}{2}\right]=\frac{x-2}{3}$

E_1) not. $\left[\frac{2x-7}{2}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow \frac{x-2}{3}=k\Rightarrow x=3k+2$

E_2) folosim $\left[\frac{2x-7}{2}\right]\le\frac{2x-7}{2}<\left[\frac{2x-7}{2}\right]+1$

E_3) $\Rightarrow k\le\frac{2(3k+2)-7}{2}<k+1\ /\cdot 2$

$\Rightarrow 2k\le 6k-3<2k+2\Rightarrow\begin{cases}4k\ge 3\\4k<5\end{cases}\Rightarrow k\in\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$

E_4) Dar, $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{1\}$

E_5) Din $x=3k+2\Rightarrow x=5$

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- se memorează formula de bază, restul se adaptează ținând cont de regula semnelor la înmulțire

TIP I: $\boxed{(\pm a \pm b)^2}$

Formula de bază

1) $\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$, se deduc

2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

3) $(-a+b)^2 = a^2-2ab+b^2$

4) $(-a-b)^2 = a^2+2ab+b^2$

TIP II $\boxed{(\pm a \pm b)^3}$

Formula de bază

1) $\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

2) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3) $(-a+b)^3 = -a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$

4) $(-a-b)^3 = -a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$

Obs.: ∃ forma restrânsă,

3') $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

4') $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

TIP III $\boxed{(\pm a \pm b \pm c)^2}$

Formula de bază

1) $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

2) $(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

3) $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

4) $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

5) $(-a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

6) $(-a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

etc

TIP IV $\boxed{a^n \pm b^n}$

1) $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

2) $a^2+b^2 \Rightarrow \nexists$ formulă

3) $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

5) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$, formulă adev. $\forall n \in \mathbb{N}$

6) $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1})$ formulă adev $\forall n$ impar

Exp.: $(-3x(y^2+2x^2y)^2 =$

$= 9x^2y^4-12x^3y^3+4x^4y^2$

Exp 2: $8x^3-27x^6y^3 =$

$= (2x)^3-(3x^2y)^3 =$

$= (2x-3x^2y)(4x^2+6x^3y+9x^4y^2)$

Exp 3: $(x+2x^2y)(x^2-2x^3y+4x^4y^2) =$

$= (x+2x^2y)(x^2-x\cdot 2x^2y+(2x^2y)^2) =$

$= x^3+(2x^2y)^3 = x^3+8x^6y^3$

CALCULAREA SUMELOR DE FRACȚII

(N2)

met I: prelucrarea numărătorului (metoda gimnaziu, nu e generală)

E_1) Se scrie numărătorul fiecărui termen ca și diferența celor doi factori de la numitor

E_2) Se dă factor comun inversul acelei diferențe

E_3) Se desface fiecare termen al sumei în diferență de două fracții

E_4) Se reduc termenii, se aduce la cea mai simplă formă

met II: metoda coeficienților nedeterminați (e mai generală)

E_1) Se scrie suma ca sumă de termen general

E_2) Se descompune termenul general în sumă de fracții cu coeficienți nedeterminați (notați $A, B, C, \dots$)

E_3) Se aduc acești fracții la același numitor, se egalează numărătorii

E_4) Se rezolvă sistemul, se înlocuiește în termen general

E_5) Se dau valori lui k, se reduc termenii, se aduce la cea mai simplă formă

Exp 1: Calculați prin metoda prelucrării numărătorului suma

$$S=\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(7n+3)(7n+10)}$$

E_1) $S=\frac{1}{7}\left(\frac{10-3}{3\cdot 10}+\frac{13-10}{10\cdot 13}+\dots+\frac{(7n+10)-(7n+3)}{(7n+3)(7n+10)}\right)$

E_2) $S=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\dots+\frac{1}{7n+3}-\frac{1}{7n+10}\right)$

$S=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7n+10}\right)\Rightarrow S=\frac{1}{7}\cdot\frac{7n+10-3}{3(7n+10)}$

$\Rightarrow S=\frac{1}{7}\cdot\frac{7(n+1)}{3(7n+10)}\Rightarrow S=\frac{n+1}{3(7n+10)}$

Exp 2: Calculați prin metoda coef. nedeterminați suma

$$S=\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(7n+3)(7n+10)}$$

E_1) $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}$

E_2) $\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}=\frac{A}{7k+3}+\frac{B}{7k+10}$

$\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}=\frac{k(7A+7B)+10A+3B}{(7k+3)(7k+10)}$

E_3) $\begin{cases}7A+7B=0 \mid :7\\ 10A+3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0 \mid \cdot 3\\ 10A+3B=1\end{cases}$

"$-$": $-7A=-1$

$\Rightarrow A=\frac{1}{7}$, $B=-\frac{1}{7}$

E_4) $\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}=\frac{\frac{1}{7}}{7k+3}+\frac{-\frac{1}{7}}{7k+10}=$

$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7k+3}-\frac{1}{7k+10}\right)$

E_5) $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7k+3}-\frac{1}{7k+10}\right)=$

$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\dots+\frac{1}{7n+3}-\frac{1}{7n+10}\right)$

$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7n+10}\right)=\frac{1}{7}\cdot\frac{7n+10-3}{3(7n+10)}=$

$=\frac{1}{7}\cdot\frac{7(n+1)}{3(7n+10)}=\frac{n+1}{3(7n+10)}$

EGALITĂȚI DEMONSTRATE PRIN INDUCȚIE

(N2)

E1) Se scrie porțiunea cu puncte puncte în stg, se notează cu $P(n)$ propriet.

E2) se vf. $P(\text{prima val pt. n})$ adev

E3) se pp $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev unde $P(k)$: ...

$P(k+1)$: ...

E4) Știm $P(k)$ adev. $\Rightarrow$ scriem $P(k)$, apoi adunăm, scădem, înmulțim sau împărțim pentru a obține membrul cu punctele punctate din $P(k+1)$

E5) urmărim atenți ce ceea ce obținem „să plece" de unde pleacă $P(k+1)$, „să se oprească" unde se oprește $P(k+1)$ respectând regula șirului

E6) obținem $M_S(P(k+1)) = a$, scriem „Este suficient ca $a = M_d(P(k+1))$" (sau dacă obț $M_S(P(k+1)) = a$, scriem „Este suficient $a = M_d(P(k+1))$ și arăt. prin calcul $\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n$.

Obs.: Dacă șirul nu respectă o anumită regulă îl modificăm a.î. toți termenii să vf aceeași regulă

Exp 1.: Arătați că:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \forall n \geq 1$$

I $P(1)$: $P(1)$: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2+1}$ adev.

II P_k: $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev unde

$P(k)$: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$

$P(k+1)$: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$

Știm $P(k)$ adev. $\Rightarrow$

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \Big| + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \Big| \cdot (2k+1)(2k+3)$$

$(2k+3)k+1 = (k+1)(2k+1) \Leftrightarrow$

$2k^2+3k+1 = 2k^2+3k+1$ adev $\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n \geq 1$

Exp 2: Arătați că:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = 1, \forall n \geq 1$$

E1) termenii șirului din stg nu respectă aceeași regulă, scriem altfel

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

E2) de aici e inducție asemănătoare cu exemplul anterior

FORMA CANONICĂ A EXPRESIEI DE GR II

(N2)

Dacă avem $E(x)=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow$ forma canonică este

$$E(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Exp. 1: scrieți sub formă canonică: $E(x)=2x^2+x+3$

$E_1)$ $E(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

$E_2)$ $\Delta=b^2-4ac=1-4\cdot2\cdot3=-23$

$$\Rightarrow E(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{4\cdot2}$$

$$E(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

Exp 2: scrieți sub formă canonică

$E(x)=x^2-2x+3$

$E_1)$ $E(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

$E_2)$ $E(x)=1\left(x+\frac{-2}{2\cdot1}\right)^2-\frac{4-4\cdot3}{4\cdot1}$

$$E(x)=(x-1)^2-\frac{-8}{4}$$

$$E(x)=(x-1)^2+2$$

Exp.: Deduceți că

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

$E_1)$ $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$

$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4c}{a}\right)=$

$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

Exp.: Deduceți că ecuația $ax^2+bx+c=0$ are rădăcinile $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta\geq0$

$E_1)$ din formă canonică,

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0 \Leftrightarrow$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\ /\sqrt{\ldots}$

$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

DETERMINAREA RELAȚIEI INDEPENDENTE DE m ÎNTRE RĂDĂCINILE UNEI ECUAȚII DE GR II

(N2)

E_1) Scriem relațiile lui VIETE, $S=-\frac{b}{a}$, $P=\frac{c}{a}$

E_2) Scoatem pe m din cea mai simplă, înlocuim în cealaltă, apoi înlocuim $S=x_1+x_2$, $P=x_1 x_2$

Exp: Fie $f_m(x)=(m-2)x^2+(2m-1)x+m-5$, $m\neq 2$
Determinați relație independentă de m între rădăcinile ecuației $f_m(x)=0$

E_1) $S=-\frac{b}{a}=-\frac{2m-1}{m-2}=\frac{1-2m}{m-2}$.

$P=\frac{c}{a}=\frac{m-5}{m-2}$

E_2) Din $P=\frac{m-5}{m-2} \Leftrightarrow Pm-2P=m-5 \Leftrightarrow m(P-1)=2P-5$

$\Leftrightarrow m=\frac{2P-5}{P-1}$

Înlocuim în $S=\frac{1-2m}{m-2} \Rightarrow S=\frac{1-2\cdot\frac{2P-5}{P-1}}{\frac{2P-5}{P-1}-2} \Rightarrow$

$S=\frac{P-1-4P+10}{2P-5-2P+2} \Leftrightarrow S=\frac{9-3P}{-3} \Leftrightarrow -3S=9-3P \mid :3$

$\Leftrightarrow -S=3-P \Leftrightarrow S-P+3=0$

Dar, $S=x_1+x_2$, $P=x_1\cdot x_2 \Rightarrow$ relația este:

$x_1+x_2-x_1x_2+3=0$

CONDIȚIA CA DOUĂ ECUAȚII DE GRAD II (N2) SĂ AIBĂ ACELEAȘI RĂDĂCINI, RESPECTIV SĂ AIBĂ O RĂDĂCINĂ COMUNĂ

Fie $ax^2+bx+c=0$

$a'x^2+b'x+c'=0$

Aceste ecuații au:

1) <u>același rădăcini</u> $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

2) <u>cel puțin o rădăcină comună</u>

$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$

3) <u>exact o rădăcină reală comună</u>

$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$ și să nu fie adevărată $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

<u>Exp1</u>: $a,b=?$ dacă ecuațiile: $2x^2+3x+5=0$ au aceleași rădăcini $4x^2+bx+a-1=0$

$\frac{2}{4}=\frac{3}{b}=\frac{5}{a-1}$

$\frac{2}{4}=\frac{3}{b}\Rightarrow 2b=12\Rightarrow \boxed{b=6}$

$\frac{2}{4}=\frac{5}{a-1}\Rightarrow 2a-2=20\Rightarrow \boxed{a=11}$

<u>Exp2</u>: $m=?$ dacă ecuațiile $x^2-3x+m=0$ și $3x^2+(m-3)x-2=0$ au cel puțin o rădăcină comună

$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-c'b)\Leftrightarrow$

$(-2-3m)^2=(m-3+9)(6-m(m-3))$

$4+12m+9m^2=(m+6)(6-m^2+3m)$

$4+12m+9m^2=6m-m^3+3m^2+36-6m^2+18m$

$4+12m+9m^2=-m^3-3m^2+24m+36$

$m^3+12m^2-12m-32=0$

	m^3	m^2	m	m^0
	1	12	−12	−32
1	1	13	1	−31≠0
2	1	14	16	0

$\Rightarrow (m-2)(1\cdot m^2+14m+16)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ \text{sau} \\ m^2+14m+16=0, \end{cases}$

$m_{2,3}=\frac{-14\pm\sqrt{196-64}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm\sqrt{132}}{2}=\frac{14\pm 2\sqrt{33}}{2}$

$=7\pm\sqrt{33}$

<u>Exp3</u>: $m=?$ dacă ecuațiile $x^2-3x+m=0$ și $3x^2+(m-3)x-2=0$ au exact o rădăcină comună

(*) $(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-c'b)$ și

(1) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ nu e adevărată

Condiția (1) e adevărată pentru $m\in\{2;\ 7\pm\sqrt{33}\}$ și ar trebui să nu fie adevărată $\frac{1}{1}=\frac{-3}{m-3}=\frac{m}{-2}$

Această relație, dacă ar fi adev ar rezulta $m-3=-3\Rightarrow m=0$ și $-2=m\Rightarrow m=-2$

$\Rightarrow \nexists m$ pt ca ea să fie adev $\Rightarrow$ pt ca ec să aibe exact o rad comună trebuie ca $m\in\{2;\ 7\pm\sqrt{33}\}$

ECUAȚIE ATAȘATĂ RĂDĂCINILOR, DETERM. EC y DACĂ ȘTIM EC ÎN x ȘI RELAȚIE ÎNTRE RĂDĂCINI

(N2)

Dacă știm x_1, x_2, găsim $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 x_2 \Rightarrow$ ec. atașată rădăc este

$$\boxed{X^2 - SX + P = 0}$$

Dacă știm ec în x și relație între y_1 și (x_1, x_2) respectiv între y_2 și (x_1, x_2), pt a găsi ec în y sunt 2 metode

met I; ec în y: $y^2 - S_y \cdot y + P_y = 0$

$S_y = y_1 + y_2$ și scriem în funcție de S_x, P_x

$P_y = y_1 \cdot y_2$ și scriem în funcție de S_x, P_x

Găsim S_x, P_x din ec în x cu VIETE

met II: găsim o relație doar între y_1 și x_1, respectiv doar între y_2 și x_2 $\Rightarrow$ relație generală între y și x, găsim pe x în funcție de y și înlocuim în ec. inițială

Exp 1: găsiți ec de gr II care are ca rădăcini pe $x_1 = 1$ și pe $x_2 = 3$

$E_1)$ $S = x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$

$P = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 3 = 3$

$E_2)$ ec este: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{x^2 - 4x + 3 = 0}$$

Exp 2: Fie x_1, x_2 rād pt $2x^2 + 5x + 9 = 0$, se cere ec în y dacă $y_1 = 2x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 + 2x_2$

$E_1)$ ec în y: $y^2 - S_y \cdot y + P_y = 0$

$E_2)$ $S_y = y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) = 3S_x$

$P_y = y_1 y_2 = (2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) =$

$= 2x_1^2 + 5x_1 x_2 + 2x_2^2 = 2(S_x^2 - 2P_x) + 5P_x$

$E_3)$ $S_x = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$; $P_x = \frac{c}{a} = \frac{9}{2}$

$E_4)$ $S_y = 3 \cdot (-\frac{5}{2}) = -\frac{15}{2}$

$P_y = 2(\frac{25}{4} - 2 \cdot \frac{9}{2}) + 5 \cdot \frac{9}{2} = \frac{25}{2} - 18 + \frac{45}{2} = 17$

$E_5)$ ec: $\boxed{y^2 + \frac{15}{2} y + 17 = 0}$

Exp 3: $2x^2 + 4x - 10 = 0$ cu x_1, x_2 rād, să se afle ec în y cu $y_1 = \frac{1}{2x_1 + x_2}$, $y_2 = \frac{1}{x_1 + 2x_2}$

Este foarte greu a calcula $S_y = y_1 + y_2$ în funcție de S_x și de P_x

Cum $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2 \Rightarrow x_2 = -2 - x_1$

$y_1 = \frac{1}{2x_1 - 2 - x_1} \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{x_1 - 2} \Rightarrow x_1 - 2 = \frac{1}{y_1}$

$\Rightarrow x_1 = 2 + \frac{1}{y_1}$, analog $x_2 = 2 + \frac{1}{y_2} \Rightarrow$

în caz general, $x = 2 + \frac{1}{y}$ și înlocuind în ec: $2x^2 + 5x + 9 = 0$ avem

$2(2 + \frac{1}{y})^2 + 5(2 + \frac{1}{y}) + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$2(4 + \frac{4}{y} + \frac{1}{y^2}) + 10 + \frac{5}{y} + 9 = 0$

$8 + \frac{8}{y} + \frac{2}{y^2} + 19 + \frac{5}{y} = 0 \mid \cdot y^2$

$$\boxed{27y^2 + 13y + 2 = 0}$$

PRODUSUL CARTEZIAN A DOUĂ MULȚIMI

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$$

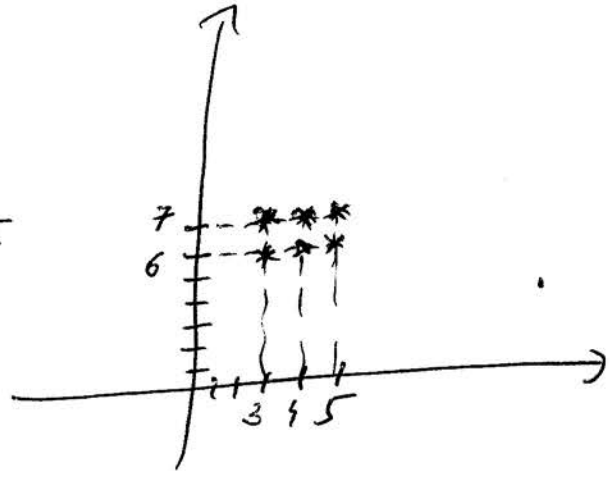
Exp: $A = \{3; 4; 5\}$, $B = \{6; 7\}$

$\Rightarrow A \times B = \{(3;6); (3;7); (4;6); (4;7); (5;6); (5;7)\}$

Obs: reprezentarea grafică a produsului cartezian a 2 mulțimi este formată din punctele care nu se unesc

Exp.: Pt ce avem mai sus,

$A \times B$ are reprezentarea grafică



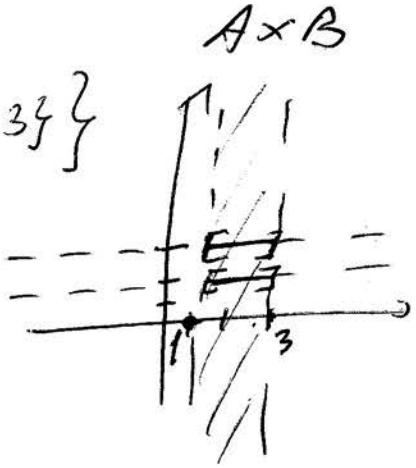
Obs 2: $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \cdot \text{card}B$

Exp: în exemplul nostru,

$\text{card}A = 3$, $\text{card}B = 2$ și $\text{card}(A \times B) = 6$

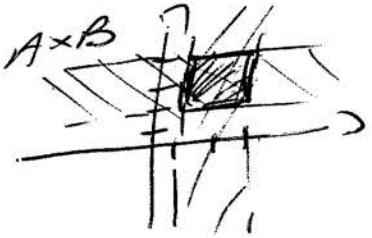
Exp 2: $A = [1; 3]$, $B = \{2; 3\}$

$\Rightarrow A \times B = \{(x, y) \mid x \in [1; 3] \text{ și } y \in \{2; 3\}\}$



Exp 3: $A = [1; 3]$, $B = [2; 4]$

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in [1; 3], y \in [2; 4]\}$



FUNCȚII PERIODICE

f este funcție periodică dacă $\exists T \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in D_f$ să avem $f(x+T)=f(x)$

Obs.: cea mai mică perioadă strict pozitivă se numește perioadă principală și se notează T_0

Exp 1: Arătați că $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^x$ este o funcție periodică, determinați perioada principală

E_1) ar trebui să $\exists T \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{N}$ să avem

$f(x+T)=f(x)$

E_2) din $f(x+T)=f(x) \Rightarrow (-1)^{x+T}=(-1)^x \Rightarrow$

$(-1)^x \cdot (-1)^T = (-1)^x \Rightarrow (-1)^T = 1$

E_3) e clar că pentru orice T număr par avem $(-1)^T=1$, iar perioada principală este $T_0=2$

Exp 2: Fie $f(x)=\{7x\}$, arătați că f este periodică de perioadă $T=\frac{1}{7}$

E_1) ar trebui ca pentru $T=\frac{1}{7}$ și $\forall x \in \mathbb{R}$ să avem

$f(x+T)=f(x)$

E_2) $f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow f(x+\frac{1}{7})=f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{7(x+\frac{1}{7})\}=\{7x\} \Leftrightarrow \{7x+1\}=\{7x\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x+1-[7x+1]=7x-[7x]$

$\Leftrightarrow 1-[7x]-1=-[7x]$ adev $\Rightarrow f$ periodică de perioadă $T=\frac{1}{7}$

FUNCȚII PARE, FUNCȚII IMPARE

$f: A \to B$ este funcție pară $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ simetric} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

$f: A \to B$ este funcție impară $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ simetric} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

D_f simetric $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$, adică punctele din el sunt situate la fel față de zero

Exp 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, studiați paritatea

E1) $D_f = \mathbb{R}$, mulțime simetrică

E2) $f(-x) = (-x)^2 + 3 \Rightarrow f(-x) = x^2 + 3$, $f(x) = x^2 + 3$ $\Rightarrow f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ funcție pară

Exp 2: $f: (0; \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, studiați paritatea

E1) $D_f = (0; \infty)$ care nu e mț simetrică $\Rightarrow f$ nu e pară, nici impară

Exp 3: $f: (-1; 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$, studiați paritatea

E1) $D_f = (-1; 1)$ mț simetrică

E2) $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$, $-f(x) = -x^3 - x$ $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ impară

Obs: f fct pară $\Leftrightarrow G_f$ simetric față de Oy

[illegible] impară $\Leftrightarrow G_f$ simetric față de O

EXPLICITAREA FUNCȚIILOR DATE PRIN MIN sau MAX (N2)

E_1) $f(x) = MIN(f_1, f_2, \dots)$ sau $f(x) = MAX(f_1, f_2, \dots)$

E_2) se egalează pe rând 2 câte 2 dintre f_i

din interior, se găsesc soluțiile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

E_3) se face tabel

x	α_1	α_2	α_3
f_1			
f_2			
- - - -			
MIN			

E_4) se dau valori lui x pe fiecare interval determinat de soluții și la MIN se scrie funcția care dă rezultatul cel mai mic, apoi scriem f cu acolade

---

Ex: $f(x) = MIN(1; x; x^2; x^3)$

E_1) $1 = x \Rightarrow x = 1$; $\quad 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$1 = x^3 \mid \sqrt[3]{\ } \Rightarrow x = 1$; $\quad x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0 \leftarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$

$x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \leftarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$ $\quad x^2 = x^3 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \leftarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$

E_2)

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1
x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
x^2	4	1	$1/4$	0	$1/4$	1	4
x^3	-8	-1	$-1/8$	0	$1/8$	1	8
MIN	x^3		x		x^3		1

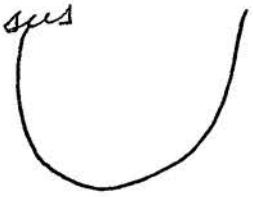
E_3) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty; -1] \\ x, & x \in (-1; 0] \\ \dots & \dots \in (0; 1] \end{cases}$

GRAFICUL FUNCȚIEI DE GR II

1) f are forma $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

2) G_f fct de gr II se numește PARABOLĂ și are forma

$a>0 \Rightarrow$ ramuri în sus



$a<0 \Rightarrow$ ramuri în jos



3) în orice situație avem un vârf, $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

4) <u>etapele trasării graficului</u>

E_1) $a>0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$ sau $a<0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cap$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=\ldots \Rightarrow A(0;f(0))\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow$ cazuri

$\Delta>0 \Rightarrow x_1=\ldots, x_2=\ldots \Rightarrow B(x_1,0)\in G_f$, $C(x_2,0)\in G_f$

$\Delta=0 \Rightarrow x_1=x_2=\ldots \Rightarrow B(x_1,0)\in G_f$

$\Delta<0 \Rightarrow G_f \cap Ox$

E_3) calculăm $x_V=-\frac{b}{2a}$, $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$

E_4) $x=-\frac{b}{2a}$ e axă de simetrie

E_5) trasăm G_f ținând cont că trece prin pct obținute

Exmpl 1: se cere G_f pt $f(x)=2x^2-3x+1$

E_1) $a=2>0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow A(0;1)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 2x^2-3x+1=0$

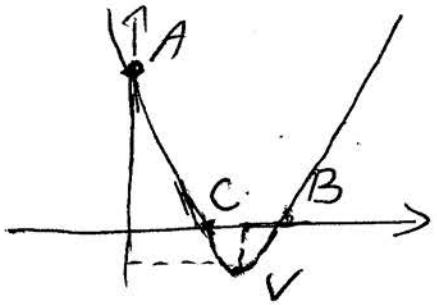
$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 1}{4}$ $\begin{matrix}1\Rightarrow B(1;0)\in G_f\\ \frac{1}{2}\Rightarrow C(\frac{1}{2};0)\in G_f\end{matrix}$

E_3) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$ $\Rightarrow V(\frac{3}{4};-\frac{1}{8})$

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4\cdot 2}=-\frac{1}{8}$

E_4) $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=\frac{3}{4}$ axă de simetrie

E_5)



Exmpl 2: Se cere G_f pt $f(x)=-x^2+4x-4$

E_1) $a=-1<0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cap$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=-4 \Rightarrow A(0;-4)\in G_f$

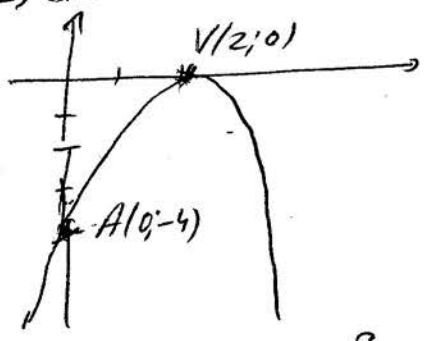
$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2\cdot 1}=2 \Rightarrow B(2;0)\in G_f$

E_3) $x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{-2}=2$ $\Rightarrow V(2;0)\in G_f$

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{0}{4}=0$

E_4) $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=2$ axă de simetrie

E_5)



Exmpl 3: se cere G_f pt $f(x)=x^2+4x+6$

E_1) $a=1>0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=6 \Rightarrow A(0;6)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^2+4x+6=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-8}}{2\cdot 1}$ nu $\Delta<0 \Rightarrow G_f \cap Ox$

E_3) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2}=-2$ $\Rightarrow V(-2;2)\in G_f$

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{8}{4}=2$

E_4) $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=-2$ axă de simetrie

E_5)

