STUDIEREA DACĂ O FUNCȚIE ADMITE PRIMITIVE

E_1) f cont $\Rightarrow$ f admite primitive

E_2) f are disc I speță (adică f are limite laterale în $x=\alpha$ finite dar f nu e cont în $x=\alpha$) $\Rightarrow f$ nu admite primit

E_3^*) f nu are Darboux $\Rightarrow f \notin \mathcal{P}$

E_4^*) dacă $\exists F: I \to \mathbb{R}$ derivabilă cu $F'(x)=f(x) \Rightarrow f \in \mathcal{P}$

dacă $\nexists F: I \to \mathbb{R}$ cu f deriv și $F'(x)=f(x) \Rightarrow f \notin \mathcal{P}$

Ex 1: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ 5x-2, & x \geq 1 \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

E_1) f cont pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,\infty)$

E_2) studiem dacă f cont în $x=1$

$l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}}(2x+1)=3$

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}}(5x-2)=3 \quad f(1)=5\cdot 1-2=3$

$\Rightarrow f$ cont în $x=1$

E_3) f cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow f \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$

Ex 2: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \leq 3 \\ 5x-2, & x>3 \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

E_1) f cont pe $(-\infty;3)$ și pe $(3;\infty)$

E_2) studiem dacă f cont în $x=3$

E_3) $l_s(3)=7$; $l_d(3)=13, f(3)=7$

$\Rightarrow f$ nu e cont în $x=3$ și $x=3$ pct disc prima speță $\Rightarrow f \notin \mathcal{P}$

Ex 3: $f(x)=\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 3, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

E_1) $f \notin Db$ (nu are nici lui Darboux) $\Rightarrow f$ nu admite primitive

---

Ex 4: $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x<0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

Studiați dacă $f \in \mathcal{P}$

E_1) nu putem calcula $l_s(0)$, deci căutăm o posibilă primit pt f, fie F

E_2) Știm că $\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

E_3) Fie $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+C_1, & x<0 \\ C_2, & x \geq 0 \end{cases}$

Evident $F_1'(x)=f_1(x)$ și $F_2'(x)=f_2(x)$,

mai trebuie ca F derivabilă $\Leftrightarrow F$ deriv în $x=0 \Rightarrow$ NECESAR F cont în $x=0$

E_4) $F_s(0) \overset{0+C_1}{=\!=} C_1$, $F_d(0)=C_2$, $F(0)=C_2$

$\Rightarrow C_1=C_2 \overset{\text{not}}{=\!=} C$

E_5) $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+C, & x<0 \\ C, & x \geq 0 \end{cases}$

studiem dacă F deriv în $x=0$

$F_s'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+C-C}{x}=\lim x\sin\frac{1}{x}=0$

$F_d'(0)=\ldots=0 \Rightarrow F$ deriv în $x=0$

$\Rightarrow f$ admite primit pe $\mathbb{R} \Rightarrow f \in \mathcal{P}$

RELAȚIA ÎNTRE O FUNCȚIE ȘI PRIMITIVA SA (N1)

a) F primitivă pt $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

b) F primitivă a lui $f \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$

Obs.: cel mai mult în probleme se folosește relația a)

Exp. 1: Fie $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ și $g(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2x}$. Arătați că f este o primitivă pt g.

E_1) Vom arăta că f derivabilă și că $f'(x) = g(x)$

E_2) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ e derivabilă

E_3) $f'(x) = (\sqrt{x} + \ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2x} = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ primitivă pt g

Exp 2: Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ dacă F este primitivă pt f unde

$f(x) = 1 + \ln(x+1)$, $F(x) = (x+a)\ln(x+b)$

E_1) F derivabilă evident

E_2) $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$((x+a)\ln(x+b))' = 1 + \ln(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \cdot \ln(x+b) + (x+a) \cdot \frac{1}{x+b} = 1 + \ln(x+b)$

$\Leftrightarrow \ln(x+b) + \frac{x+a}{x+b} = 1 + \ln(x+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+b = x+1 \Rightarrow b = 1 \\ \frac{x+a}{x+b} = 1 \Rightarrow x+a = x+b \Rightarrow a = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$ și $\boxed{b=1}$

MONOTONIA, CONVEXITATEA PRIMITIVELOR

Se cere să arătăm că orice primitivă a funcției f este a) strict crescătoare (sau descrescătoare)
b) convexă (sau concavă)

E_1) Fie $F(x)$ o primitivă oarecare pt $f(x) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

E_2) pt a studia monot lui $F(x)$ studiem semnul lui $F'(x)$ $\Rightarrow$
Dar, $F'(x) = f(x)$
studiem semnul lui $f(x)$

E_3) pt a studia convexitatea studiem semnul lui $F''(x)$
Dar, $F'(x) = f(x) \mid ()'$
$\Rightarrow F''(x) = f'(x)$, deci studiem semnul lui $f'(x)$

Obs1.: dacă $F'(x) \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$
dacă $F'(x) \leq 0 \Rightarrow F \searrow$
dacă $F'(x) > 0 \Rightarrow F_{\Delta} \nearrow$
dacă $F'(x) < 0 \Rightarrow F_{\Delta} \searrow$

Obs2.: dacă $F''(x) \geq 0 \Rightarrow F$ convexă
dacă $F''(x) \leq 0 \Rightarrow F$ concavă

Exp1: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2-2x}$
Studiați monotonia primitivelor lui $f(x)$

E_1) Fie $F(x)$ o primitivă oarecare pt $f(x) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

E_2) monot primitivelor $\Rightarrow$ calculăm $F'(x)$
Dar, $F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = e^{x^2-2x}$

E_3) $F'(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2-2x} = 0 \Rightarrow$ K.O.
$\Rightarrow F'$ are ac semn pe $\mathbb{R}$

E_4)

x					
$F'(x)$	+	+	+	+	+
$F(x)$		↗			

At a găsi semnul lui $F'(x)$, folosim $e > 0 \Rightarrow e^{x^2-2x} > 0$

Exp2: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2-2x}$
Studiați convexitatea primitivelor lui $f(x)$

E_1) Fie $F(x)$ o prim. oarecare pt $f(x) \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

E_2) convexitatea primitivelor $\Rightarrow$ calculăm $F''(x)$
$F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = e^{x^2-2x} \Rightarrow$
$F''(x) = (e^{x^2-2x})' = e^{x^2-2x}(2x-2)$

E_3) $F''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x^2-2x} = 0, \text{ K.O.} \\ 2x-2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

E_4)

x		1	
$F''(x)$	− − −	0	+ + +
$F(x)$	∩		∪

$\Rightarrow F$ concavă pe $(-\infty, 1]$
F convexă pe $[1, \infty)$

TABEL DE PRIMITIVE

1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \ a \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

3) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

4) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

9) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

10) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

11) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

12) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

13) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

14) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

15) $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

16) $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$

17) $\int f^n \cdot f' = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$

18) $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$

19) $\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx =$
$= \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int g(x) dx$

20)* $\int f(ax+b) = \frac{\text{formula}}{a} + C$
(nu e obligatorie)

Ex 1: $\int (2x^3 + .5\cos x) dx =$
$= 2\int x^3 dx + 5\int \cos x \, dx =$
$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5\sin x + C$

Ex 2: $\int (7\operatorname{tg} x - 5 \cdot 3^x) dx =$
$= 7(-\ln|\cos x|) - 5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$

Ex 3: $\int (x^3 + x + 1)^5 (3x^2 + 1) dx =$
$= \int (x^3 + x + 1)^5 \cdot (x^3 + x + 1)' dx =$
$= \frac{(x^3 + x + 1)^6}{6} + C$

Ex 4: $\int \frac{4x^3 + 1}{x^4 + x} dx = \int \frac{(x^4 + x)'}{x^4 + x} dx =$
$= \ln|x^4 + x| + C$

Ex 5: $\int \cos(5x + 1) dx =$
$= \frac{\sin(3x+1)}{3} + C$

Ex 6: $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx =$
$= \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^4} + C$

Obs: $\int \frac{1}{x^3} \neq \ln|x^3| + C$

DETERMINAREA PRIMITIVELOR UNEI FUNCȚII DATE PRIN ACOLADE

E_1) Se arată că f admite primitive (de obicei se arată că f continuă)

E_2) Se găsește primitiva pe fiecare ramură și se obține

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x)+C_1, & x\le a \\ F_2(x)+C_2, & x>a \end{cases}$$

E_3) Se pune condiția ca F continuă în $x=a \Rightarrow$ legătura între constante și se obține $F(x)$ doar în funcție de C

Obs.: Dacă se cere o primitivă cu $F(a)=b$, atunci se înlocuiește și se determină valoarea lui $C \Rightarrow$ F este o funcție care nu depinde de C

Exp 1.: Fie $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$

Găsiți o primit. F pentru f

$F(0)=-1$

E_1) f cont pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$ ca și fct elementară, studiem dacă f continuă în $x=0$

E_2) $l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} x = 0$

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sin x = 0$

$f(0)=0$

$\Rightarrow f$ cont în $x=0$

E_3) $\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primit. pe $\mathbb{R}$

E_4) $F_1(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_1$

$F_2(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C_2$

E_5) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+C_1, & x\le 0 \\ -\cos x+C_2, & x>0 \end{cases}$

E_6) F cont în $x=0 \Rightarrow$

$l_s(0)=l_d(0)=F(0) \Rightarrow$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}}\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}}\left(-\cos x+C_2\right)=\frac{0}{2}+C_1$

$\Rightarrow 0+C_1=-1+C_2=0+C_1 \Rightarrow C_2=1+C_1$

$C=1+C$

E_7) $\Rightarrow F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+C, & x\le 0 \\ -\cos x+1+C, & x>0 \end{cases}$

E_8) Dacă se cerea doar mulțimea primitivelor, atunci problema era rezolvată. Se cere însă o primitivă cu $F(0)=-1$

E_9) $\Rightarrow \frac{0^2}{2}+C=-1 \Rightarrow C=-1$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-1, & x\le 0 \\ -\cos x, & x>0 \end{cases}$ este primitiva cerută

INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

Se cere $F(x)=\int f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx$

E_1) not $f(x)=f_1(x)\Rightarrow f'(x)=\dots$

$g'(x)=f_2(x)\Rightarrow g(x)=\dots$

E_2) $F(x)=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$

Obs 1.: dacă $g(x)$ nu se poate găsi direct, folosim $g(x)=\int g'(x)dx$ care se calculează

Obs 2.: $g'(x)$ se alege astfel încât să putem găsi ușor pe g, abia apoi ne gândim dacă pentru f avem alegere. Dacă avem alegere pt f, atunci pe f îl alegem astfel încât prin derivare să devină mai simplu

---

Exp 1: Calculați $\int x\cdot \ln x\,dx$

E_1) $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}$

E_2) $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$

$F(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx$

$F(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C$

Exp 2: Calculați $\int x^2\cdot\sin x\,dx$

E_1) $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$

$g'(x)=\sin x\Rightarrow g(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x$

E_2) $F(x)=-x^2\cos x+2\underbrace{\int x\cos x\,dx}_{F_1(x)}$

E_3) pt $F_1(x)$ alegem

$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=\cos x\Rightarrow g(x)=\int\cos x\,dx=\sin x$

E_4) $F_1=x\sin x-\int\sin x\,dx=$

$=x\sin x-(-\cos x)+C=$

$=x\sin x+\cos x+C$

E_5) $F=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x+C)=$

$=\dots\sin x+2\cos x+C$

CALCULUL INTEGRALELOR DE TIPUL

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \;;\; \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \;;\; \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

E1) se amplifică cu conjugatul

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

E2) se desparte în sumă de 2 integrale

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx}_{I_1} - a^2 \cdot \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx}_{I_2}$$

E3) pt I_1 alegem

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2}$

E4) pt I_2 e formulă

Obs: se folosesc formulele

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

Exemplu 1: Calculați $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

E1) $I = \int \sqrt{x^2-4}\,dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}\,dx =$

$$= \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx}_{I_1} - 4\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx}_{I_2}$$

E2) pt I_1 alegem

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \sqrt{x^2-4}$

E3) $I_1 = x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}\,dx$

$\Rightarrow I_1 = x\sqrt{x^2-4} - I$

E4) $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

E5) $I = I_1 - 4I_2 \Rightarrow$

$I = x\sqrt{x^2-4} - I - 4\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C\right)$

$\Rightarrow 2I = x\sqrt{x^2-4} - 4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-4} - 4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right) + C}$

Exemplu 2: Calculați $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$

E1) $I = \int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

$$= 9\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx}_{I_2}$$

E2) $I_1 = \arcsin\frac{x}{3} + C$

E3) pt. I_2 alegem

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\sqrt{9-x^2}$

E4) $I_2 = -x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2}\,dx$

$I_2 = -x\sqrt{9-x^2} + I$

E5) $I = 9I_1 - I_2 \Rightarrow$

$I = 9\left(\arcsin\frac{x}{3} + C\right) - \left(-x\sqrt{9-x^2} + I\right)$

$I = 9\arcsin\frac{x}{3} + C + x\sqrt{9-x^2} - I$

$2I = 9\arcsin\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2} + C$

$\boxed{I = \frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2}\right) + C}$

PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ LA CALCULUL PRIMITIVELOR

(N1)

E_1) se notează o expresie ce depinde de x cu t astfel încât derivata a ceea ce notez să apară în integrală la numărător

E_2) se derivează relația, se obține $dt = (\dots)' dx$ și se obține $I(t)$, adică o integrală ce depinde doar de t

E_3) se calculează integrala nou obținută în funcție de t, apoi la $I(x)$ înlocuim pe t cu expresia ce depinde de x

Obs.: dacă după notație avem o integrală ce depinde și de x și de t $\Rightarrow$ notația nu e bună

Exp.: Calculați $\int (2x+1)(x^2+x+5)^7 dx$

E_1) not $t = x^2+x+5 \mid (\,)' \Rightarrow$

$dt = (2x+1)dx \Rightarrow$

E_2) $I(t) = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C \Rightarrow$

$I(x) = \frac{(x^2+x+5)^8}{8} + C$

Exp 2: Calculați $I = \int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}} dx$

E_1) not $t = x^2 \mid (\,)' \Rightarrow dt = 2x dx$

$\Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$

E_2) $I(t) = \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt =$

$= \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2-1} \right| + C$

E_3) $I(x) = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + \sqrt{x^4-1} \right| + C$

A DOUA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ

E_1) se notează o expresie care depinde de x cu t

E_2) se găsește x în funcție de t

E_3) se derivează relația $\Rightarrow dx = (\dots)' dt$

E_4) se calculează integrala nou obținută, la rezultat înlocuim pe t cu valoarea cu care l-am notat

Exp: Calculați $\int tg^2 x \, dx$

E_1) notăm $t = tg\, x \Rightarrow x = arctg\, t \,/()'$

E_2) $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

E_3) $I(t) = \int t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2}{t^2+1} dt$

E_4) $I(t) = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int \left(\frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt$

$I(t) = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = t - arctg\, t + C$

E_5) $I(x) = tg\, x - arctg\,(tg\, x) + C$

$I(x) = tg\, x - x + C$

PRIMITIVE PT. FUNCTII RATIONALE SIMPLE

1) $F(x)=\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx$

not $ax+b=t \mid ()' \Rightarrow a\,dx=dt$

$\Rightarrow dx=\frac{1}{a}dt \Rightarrow F(t)=\int \frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{a}dt$

2) $F(x)=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

• forma canonica

E1) $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

E2) $F(x)=\int \frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}}dx$

E3) $x+\frac{b}{2a}=t \mid ()' \Rightarrow dx=dt$

$F(t)=\int \frac{1}{at^2-\frac{\Delta}{4a}}dt=\frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2-\frac{\Delta}{4a}}dt$

care este formula

3) $F(x)=\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx$

• formam la numarator derivata numitorului

E1) $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$

E2) $F(x)=\frac{1}{2a}\int \frac{2ax}{ax^2+bx+c}dx=$

$=\frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}dx=$

$=\frac{1}{2a}\left(\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{F_1(x)}-b\underbrace{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx}_{F_2(x)}\right)$

E3) $F_1(x)=\int \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}dx=$

$=\ln|ax^2+bx+c|+C$, $F_2(x)$ forma canonica

Exemplu 1: $F(x)=\int \frac{1}{(3x+5)^7}dx$

E1) $3x+5=t \mid ()' \Rightarrow 3\,dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{3}$

E2) $F(t)=\int \frac{1}{t^5}\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^{-5}dt=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{t^4}+C$

E3) $F(x)=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(3x+5)^7}+C$

Exemplu 2: $F(x)=\int \frac{1}{3x^2+7x+5}dx$

E1) $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

E2) $F(x)=\int \frac{1}{3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49-60}{12}}dx$

E3) $x+\frac{7}{6}=t \mid ()' \Rightarrow dx=dt \Rightarrow$

$F(t)=\int \frac{1}{3t^2+\frac{11}{12}}dt=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{11}{36}}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{11}}{6}}+C$

$F(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6t}{\sqrt{11}}+C$

E4) $F(x)=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6\left(x+\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{11}}+C$

Exemplu 3: $F(x)=\int \frac{x}{3x^2+7x+5}dx$

E1) $(3x^2+7x+5)'=6x+7$

E2) $F(x)=\frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+7x+5}dx=$

$=\frac{1}{6}\int \frac{6x+7-7}{3x^2+7x+5}dx=$

$=\frac{1}{6}\left(\underbrace{\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+5}dx}_{F_1(x)}-7\underbrace{\int \frac{1}{3x^2+7x+5}dx}_{F_2(x)}\right)$

E3) $F_1(x)=\int \frac{(3x^2+7x+5)'}{3x^2+7x+5}dx=$

$=\ln|3x^2+7x+5|+C$

$F_2(x)=\int \frac{1}{3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49-16}{12}}dx$ care e calculata la exemplul 2

CRITERII DE STUDIERE A INTEGRABILITĂȚII

(N1)

Cel mai des folosite sunt:

1) f cont pe $[a,b] \Rightarrow f$ integ pe $[a,b]$

2) f mărg. pe $[a,b] \Rightarrow f$ NU E integ pe $[a,b]$

3) f integrabilă și $g \neq f$ în număr finit de pct $\Rightarrow g$ integrab și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

4) f mărg și discontinuă în nr. finit de pct $\Rightarrow f$ integrabilă

Obs1.: f cont $\Rightarrow f$ are primit

Obs2: f cont $\Rightarrow f$ integrabilă

Obs3.: f are primit $\not\Rightarrow f$ cont

Obs4: f integrab $\not\Rightarrow f$ cont

Obs5.: f are primit, f integrabilă $\Rightarrow f$ continuă

Exp1: $f:[1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 2\\ x+2, & x>2\end{cases}$

Studiați dacă f integrabilă pe $[1;3]$

E1) f cont pe $[1;2)\cup(2;3]$ ca fct elem

E2) Studiem dacă f cont în $x=2$

$l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 2x=4$

$l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x+2)=4$

$f(2)=4$

$\Rightarrow f$ cont în $x=2$

E3) $\Rightarrow f$ cont pe $[1;3]\Rightarrow f$ integrab pe $[1;3]$

Exp2: $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$

Studiați dacă f integrab pe $[0;1]$

E1) f cont pe $(0;1]$, studiem dacă f cont în $x=0$

E2) $l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \quad \frac{1}{0^+}=\infty$

și $f(0)=0 \Rightarrow f$ nu e cont în $x=0$

E3)

x	$[0$	$1]$
$f(x)$	$0\nearrow\infty$	$1]$

Obs. că f nemărginită $\Rightarrow f$ nu e integrabilă pe $[0;1]$

Exp3: $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ 3, & x=0\end{cases}$

E1) $l_d(0)=0$, $f(0)=3\Rightarrow f$ nu e cont în $x=0$

E2) deoarece $\sin x\in[-1;1]$ și $f(0)=3\Rightarrow f$ mărginită

E3) f mărginită, f discont doar în $x=0$ $\Rightarrow f$ integrabilă

T. LEIBNIZ-NEWTON

f continuă și F primitivă a lui f ⇒

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Exp: calculați $\int_2^3 x^3 dx$

$E_1)$ $f(x) = x^3$, $f: [2,3] \to \mathbb{R}$ ⇒ f continuă

⇒ f are primitive, $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

$$E_2) \int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81-16}{4}$$

Obs.: nu se scade dacă apare direct E_2)

Obs2: Nicăodată la integrale definite (apar capete) nu se pune constanta

CALCULAREA INTEGRALELOR UNOR FUNCȚII DEFINITE PRIN ACOLADĂ

- Se folosește: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$

unde $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le c \\ f_2(x), & x > c \end{cases}$

Exemplu: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1+\sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$

Se cere: $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$

$E_1)\ I = \int_{-1}^{\pi} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_0^{\pi} (1+\sin x)dx$

$E_2)\ I = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + (x - \cos x)\Big|_0^{\pi} =$

$= 0 - \frac{(-1)^4}{4} + \pi - \cos\pi - (0 - \cos 0)$

$= -\frac{1}{4} + \pi + 1 + 1 = \frac{4}{2} - \frac{1}{4} + \pi = \frac{7}{4} + \pi$

INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

Se cere: $I = \int_a^b f \cdot g' \, dx$

E_1) $f(x) = \ldots \Rightarrow f'(x) = \ldots$

$g'(x) = \ldots \Rightarrow g(x) =$ direct sau $g(x) = \int g'(x) dx$

E_2) $I = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx$

Ex: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

E_1) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$

E_2) $I = x^2 \cdot (-\cos x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx$

$I = -\left(\pi^2 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} - (-\pi)^2 \underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} \right) + 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx$

$I = -(-\pi^2 + \pi^2) + 2 \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \, dx$

E_3) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow I = 2 \left(x \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \right.$

$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x \qquad \left. - \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx \right)$

$= 2 \left(\pi \sin \pi - (-\pi) \underbrace{\sin(-\pi)}_{0} + \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$

$= 2 \left[\pi \sin \pi + \cos \pi - \cos(-\pi) \right] = -1 + 1 =$

PRIMA METODĂ DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ (INTEGRALE DEFINITE)

E_1) se notează o expresie ce depinde de x cu t astfel încât derivata a ceea ce notez cu t apare în integrală (la numărător)

E_2) derivez relația $\Rightarrow dt = (\dots)' dx$

E_3) schimb capetele, adică $x = a \Rightarrow t = t_1$

$x = b \Rightarrow t = t_2$

E_4) $I(t) = \int_{t_1}^{t_2} \dots\dots dt$, care se calculează

Exp: Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

E_1) $t = \sin x \,|\,(\,)' \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

E_2) $x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

E_3) $I = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{t}{1} \Big|_0^1 =$

$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$

CALCULUL ARIILOR ȘI A VOLUMELOR FOLOSIND INTEGRALELE

(N1)

1) <u>aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=a$ și $x=b$</u> este

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

2) <u>aria dintre G_f, G_g, axa Ox și dreptele $x=a$ și $x=b$</u> este

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Obs.: modulul se explicitează folosind una din metodele:

a) $x\in[a,b]$ și vedem semnul lui $f(x)$

b) tabel de semne

c) grafic

3) <u>volumul corpului generat de f</u>

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Exp 1.: se cere aria dintre G_f, axa Ox, dreptele $x=1$, $x=3$ pt $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

E1) $A=\int_1^3 |f(x)|\,dx=\int_1^3 \left|\frac{x}{x^2+1}\right| dx$

E2) $x\in[1;3]\Rightarrow \frac{x}{x^2+1}\geq 0 \Rightarrow$

$$A=\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_1^3=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 2)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 5$$

Exp 2: se cere aria dintre G_f, G_g $x=1$, $x=3$ pt $f(x)=x^2+2$, $g(x)=3x$

E1) $A=\int_1^3 |f(x)-g(x)|\,dx=\int_1^3 |x^2-3x+2|\,dx$

E2)

x	$[1$		2		$3]$
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

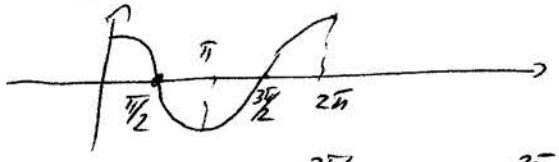
E3) $A=\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx+\int_2^3(x^2-3x+2)\,dx$

$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2x\Big|_1^2+\frac{x^3}{3}\Big|_2^3-3\frac{x^2}{2}\Big|_2^3+2x\Big|_2^3$$

Exp 3: se cere aria dintre $f(x)=\cos x$, dreptele $x=0$ și $x=2\pi$

E1) $A=\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx$

E2)



E3) $A=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx=$

$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}+\sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}=$$

$$=(\sin\pi/2-\sin 0)-(\sin 3\pi/2-\sin\pi/2)+$$

$$+(\sin 2\pi-\sin 3\pi/2)=$$

$$=(1-0)-(-1-1)+(0-(-1))=$$

$$=1+2+1=4$$

Exp 4: se cere volumul corpului generat de $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ pt $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

E1) $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1(1-x^2)\,dx$

$$=\pi\left(x\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)=\pi\left(1-0-\left(\frac{1}{3}-0\right)\right)$$

$$=\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$