METODA FACTORULUI FORȚAT LA RADICALI DE ORDIN PAR CÂND $x \to -\infty$

- dacă $x \to -\infty$ și se dă factor forțat la radicali de ordin par, în fața radicalului iese cu modul și apoi studiem semnul candidatei din modul

- dacă $x \to \infty$ sau $x \to -\infty$ dar avem radicali de ordin impar, atunci nu mai apare modulul

---

Exp 1: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} \overset{\frac{\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Exp 2: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}}{2x+1} \overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})}$

$= \dfrac{1}{2}$

Exp 3: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+x}}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x^2|\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x^2(3+\frac{1}{x^2})} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x^2(3+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1}{3}$

Exp 4: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+x^3}}{5x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x(5+\frac{1}{x})} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x(5+\frac{1}{x})} = -\dfrac{1}{5}$

Exp 5: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})} =$

$= 1$

Exp 6: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})} =$

$= \dfrac{1}{2}$

LIMITE DE FUNCȚII CÂND NUMITORUL TINDE LA 0

E_1) tabel de semne pentru numitor și calc l_s, l_d

E_2) $l_s(\alpha) = l_d(\alpha) \Rightarrow \exists \lim_{x \to \alpha} f(x)$

$l_s(\alpha) \neq l_d(\alpha) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to \alpha} f(x)$

Exp 1: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$, Studiați dacă are limită în $x=1$ și în $x=-1$

E_1) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{3}{0?}}{=}$

E_2)

x		-1		1	
x^2-1	$+\,+$	0	$-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+$

E_3) $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{3}{0-}}{=} -\infty$

$l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{3}{0+}}{=} \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1}$

E_4) $l_s(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{-1}{0+}}{=} -\infty$

$l_d(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \dfrac{2x+1}{x^2-1} \overset{\frac{-1}{0-}}{=} \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -1}$

ASIMPTOTE

1) ASIMPTOTE ORIZONTALE - se pot calcula doar dacă D_f nemărginit

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$

$l \in \mathbb{R}$ (număr) → $y = l$ as. oriz spre $-\infty$

$l = \pm\infty$ sau $\nexists\, l$ → $\nexists$ as. oriz spre $-\infty$

Analog as. oriz spre ∞

2) ASIMPTOTE OBLICE - se pot calcula doar dacă D_f nemărginit și dacă $\nexists$ as. oriz în direcția respectivă

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$m \in \mathbb{R}$ → $n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$

$n \in \mathbb{R}$ → $y = mx + n$ as. oblică spre $-\infty$

$n = \pm\infty$ sau $\nexists\, n$ → $\nexists$ as. oblică spre $-\infty$

$m = \pm\infty$ sau $\nexists\, m$

Analog spre ∞

3) ASIMPTOTE VERTICALE - se pot calcula doar în capetele deschise și finite ale D_f, se vor calcula limite laterale

$l = \lim_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)$

$l = \pm\infty$ → $x = \alpha$ as. verticală la stânga pt G_f

$l \in \mathbb{R}$ (număr) sau $\nexists\, l$ → $\nexists$ as. verticală la stg pt G_f

---

Ex 1: $f(x) = \ln(x-1)$, $f: D \to \mathbb{R}$

E_1) Cond: $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D_f = (1;\infty)$

E_2) as. oriz:

spre ∞: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x-1) = \frac{\infty}{\infty}$: $\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow G_f$ nu are as. oriz spre ∞

spre $-\infty$ nu e voie să calculăm deoarece $D_f = (1;\infty)$

E_3) as. oblice:

spre ∞: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x} \overset{0\cdot 1}{=\!=} 0$, s-a folosit $\lim_{x_n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0$

$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \ln(x-1) = \infty$

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oblică spre ∞

E_4) as. verticală: $D_f = (1;\infty)$

$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \ln(x-1) \overset{\ln 0_+}{=\!=} \infty$

$\Rightarrow x = 1$ as. vert la dreapta

STUDIEREA CONTINUITĂȚII UNEI FUNCȚII CU ACOLADE

(N1)

TIP I: $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x<\alpha \\ f_2(x), & x\geq\alpha \end{cases}$ sau altfel definită dar cu inec. în fct de α

E1) f cont pe $(-\infty;\alpha)$ și pe (α,∞) ca și fct elementară

E2) Studiem cont lui f în $x=\alpha$:

$l_s(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)$; $l_d(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x)$

E3) dacă $l_s(\alpha)=l_d(\alpha)=f(\alpha)\Rightarrow$ f cont în $x=\alpha$, dacă nu are loc dubla egalitate $\Rightarrow$ f discont în $x=\alpha$ și studiem tipul de discont.

TIP II $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\mathbb{Q} \\ f_2(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$, se cere cont în $x=\alpha$ (deci nu pe $\mathbb{R}$)

E1) $l_1(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x_n\to\alpha \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f(x_n)$ și

$l_2(\alpha)=\lim\limits_{\substack{x'_n\to\alpha \\ x'_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x'_n)$

E3) dacă $l_1(\alpha)=l_2(\alpha)=f(\alpha)\Rightarrow$ f cont în $x=\alpha$, dacă nu are loc dubla egalitate $\Rightarrow$ f discont în $x=\alpha$ și $x=\alpha$ pct disc. și studiem tipul de discont

---

Exp 1: Studiați cont lui f pe $\mathbb{R}$ unde $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$

E1) f cont pe $(-\infty;0)$ și pe $(0;\infty)$ ca și fct. elementară (1)

E2) studiem dacă f cont în $x=0$

$l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{1+x}=1$

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (x^2+1)=1$

$f(0)=0^2+1=1$

$\Rightarrow$ f cont în $x=0$ (2)

E3) din (1) și (2) $\Rightarrow$ f cont pe $\mathbb{R}$

Exp 2: Studiați cont lui f pe $\mathbb{R}$ unde $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<-1 \\ x+1, & x\geq -1 \end{cases}$

E1) f cont pe $(-\infty;-1)$ și pe $(-1;\infty)$ ca și fct elementară

E2) Studiem dacă f cont în $x=-1$

$l_s(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} \frac{1}{x}=-1$; $l_d(-1)=\ldots=0$; $f(-1)=0$

$\Rightarrow l_s(-1)\ l_d(-1)\in\mathbb{R}$ și f nu e cont în $x=-1$; ... Treabă

Exp 3: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0 \\ x+1, & x\geq 0 \end{cases}$, se cere cont pe $\mathbb{R}$

E1) f cont pe $(-\infty;0)$ și $(0;\infty)$ ca fct elementară

E2) $l_s(0)=-\infty$; $l_d(0)=1$, $f(0)=1\Rightarrow$ f nu e cont în $x=0$ și cum $l_s(0)\notin\mathbb{R}\Rightarrow$ $x=0$ pct disc II speță

Exp 4: $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in\mathbb{Q} \\ x+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Studiați cont în $x=1$

E1) $l_1(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f(x_n)=1$; $l_2(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x_n)=2$

$f(1)=1\Rightarrow$ f nu e cont în $x=1$

E2) Studiem tipul de discont pt $x=1$

$l_s(1)$ se împarte în 2 limite

$l_s^1(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{Q}}} f(x_n)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{Q}}} x_n^3=1$

$l_s^2(1)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x_n)=\lim\limits_{\substack{x_n\to 1 \\ x_n<1 \\ x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} (x_n+1)=2$

$\Rightarrow \nexists\ l_s(1)\Rightarrow x=1$ pct disc II speță

PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE

1) f continuă $\Rightarrow f$ nu schimbă semnul decât în rădăcini și ca să găsim semnul, e suficient să îl calculăm într-o valoare sau să facem limita într-unul din capete

2) Dacă f continuă pe $(a;b)$ și $f(a)\cdot f(b)<0$ $\Rightarrow \exists$ o rădăcină a lui $f(x)$ pe $(a;b)$

3) Dacă f continuă pe $(a;b)$, $f(a)\cdot f(b)<0$ și f strict monotonă $\Rightarrow \exists$ o rădăcină unică pe $(a;b)$

Exemplu: Găsiți semnul pentru $f(x)=\ln x$, $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$

$E_1)$ $f(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=e^0 \Rightarrow x=1\in(0;\infty)$

$E_2)$

x	0		1		∞
$\ln x$	$\nexists$	$-$	0	$+$	

f continuă $\Rightarrow$ nu poate schimba semnul decât în rădăcini, adică în $x=1$

calculăm $f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}=\ln e^{-1}=-\ln e=-1$

$\Rightarrow f(x)<0,\ \forall x\in(0;1)$

$f(e)=\ln e=1>0 \Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in(1;\infty)$

Ex 2: arătați că $f(x)=x^3+x-1$ are o rădăcină $\in(0;1)$

Este rădăcina unică?

$E_1)$ $f(0)=0-1=-1<0$

$f(1)=1>0$

$\Rightarrow \exists$ o rădăcină $\in(0;1)$

f cont

f strict crescătoare ($f_1+f_2+f_3$ strict crescătoare)

$\Rightarrow$ rădăcină unică.

TABEL CU DERIVATE DE MEMORAT

$c' = 0$	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

TABEL CU DERIVATE CE SE DEDUC

$x' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\log_b x)' = \frac{1}{x \ln b}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Exp 1: $(2^x)' = 2^x \ln 2$

$4' = 0$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

OPERAȚII CU FUNCȚII DERIVABILE

a) $(f+g)' = f' + g'$

$(f-g)' = f' - g'$

b) $(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$

c) $(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Obs: $(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4)' = f_1' f_2 f_3 f_4 + f_1 f_2' f_3 f_4 +$

$+ f_1 f_2 f_3' f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4'$

Exp: $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$. Se cere $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x^3 - (\ln x) \cdot (x^3)'}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}$$

DERIVAREA FUNCȚIILOR COMPUSE

(N1)

se folosesc trei reguli de derivare

$$\boxed{(f(u))' = f'(u)\cdot u'} \qquad \boxed{(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'}$$

$$\boxed{(u^a)' = a\cdot u^{a-1}\cdot u'}$$

și aceste reguli se folosesc dacă argumentul funcției nu este x ci o altă funcție care depinde de x notată u

Obs.: dacă o funcție este la o anumită putere, derivăm întâi ca și u^a adică $(u^a)' = a u^{a-1}\cdot u'$

Exp 1: $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' =$

$= (\cos 3x)\cdot 3 = 3\cos 3x$

Exp 2: $\left(\ln \frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' =$

$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)'\cdot(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

Exp 3: $\left(\sin^3(5x)\right)' = 3\sin^2(5x)\cdot(\sin 5x)' =$

$= 3\sin^2(5x)\cdot(\cos 5x)\cdot(5x)' =$

$= 3\sin^2(5x)\cdot(\cos 5x)\cdot 5 =$

$= 15\sin^2(5x)\cdot(\cos 5x)$

Exp 4: $\left(2^{\sin x}\right)' = 2^{\sin x}\cdot \ln 2 \cdot (\sin x)' =$

$= 2^{\sin x}\cdot \ln 2 \cdot \cos x$

Exp 5: $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' =$

$= 2\sin x \cdot \cos x$

Exp 6: $\left(\sin(\ln(\cos x))\right)' =$

$= \cos(\ln(\cos x))\cdot(\ln(\cos x))' =$

$= \cos(\ln(\cos x))\cdot \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' =$

$= \cos(\ln(\cos x))\cdot \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) =$

$= -\cos(\ln(\cos x))\cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

Exp 6: $\left(2^{\sin^3 x}\right)' = 2^{\sin^3 x}\cdot \ln 2 \cdot (\sin^3 x)' =$

$= 2^{\sin^3 x}\cdot \ln 2 \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$

ECUAȚIA TANGENTEI LA GRAFICUL LUI f

(N1)

a) Dacă f derivabilă în $x=a \Rightarrow$ ec. tangentei la G_f este: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

b) Dacă $f'(a) = \pm\infty \Rightarrow$ ec. tg la G_f este $x = a$

Obs: panta tangentei (coeficientul unghiular al tangentei) este $m_t = f'(a)$

Ex.: Găsiți ec. tg în $M(1;5)$ pentru $f(x) = x^5 + 3x + 1$

$E_1)$ $f'(x) = 5x^4 + 3 \Rightarrow f'(1) = 8$; $f(1) = 1 + 3 \cdot 1 = 5$

$E_2)$ ec. tg este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 5 = 8(x-1)$

$\Rightarrow y - 5 = 8x - 8 \Rightarrow 8x - y - 3 = 0$

Ex 2: $f: [1;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, se cere ec. tg în $x=1$

$E_1)$ $f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$E_2)$ $f'(1) \overset{\frac{1}{0_+}}{=\!=} \infty \Rightarrow$ ec. tg este $x = 1$

MONOTONIA FUNCȚIILOR FOLOSIND PRIMA DERIVATĂ

(N1)

$f'(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } I \\ f \nearrow \text{ pe } I \end{cases}$

$f'(x)<0 \Rightarrow \begin{cases} f_s \searrow \text{ pe } I \\ f \searrow \text{ pe } I \end{cases}$

$f'(x)\geq 0 \Rightarrow f \nearrow$ pe I, nu știm dacă $f_s \nearrow$ pe I

$f'(x)\leq 0 \Rightarrow f \nearrow$ pe I, nu știm dacă $f_s \searrow$ pe I

$f'(x)\geq 0$ și $f'(x)=0$ în nr izolate $\Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } I \\ f \nearrow \text{ pe } I \end{cases}$

$f'(x)\leq 0$ și $f'(x)=0$ în nr izolate $\Rightarrow \begin{cases} f_s \searrow \text{ pe } I \\ f \searrow \text{ pe } I \end{cases}$

Obs.: la intervalele de monotonie se ia interval închis în ambele părți

---

Exp 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$

$E_1)$ $f'(x)=3x^2+1$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{3}$

nu are soluții și $3x^2+1>0$

$E_3)$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f		$\nearrow$	

$f'(x)>0$ pe $\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } \mathbb{R} \\ f \nearrow \text{ pe } \mathbb{R} \end{cases}$

Exp 2: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

$E_1)$ $f'(x)=3x^2-6x+3$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow 3(x^2-2x+1)=0$

$\Rightarrow 3(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

$E_3)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

$E_4)$ $f'(x)\geq 0$ și $f'(x)=0$ în $x=1 \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } I \\ f \nearrow \text{ pe } I \end{cases}$

Exp 3: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-12x+1$

$E_1)$ $f'(x)=6x-12$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

$E_3)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(x)<0$ pe $(-\infty,2) \Rightarrow \begin{cases} f_s \searrow \text{ pe } (-\infty,2] \\ f \searrow \text{ pe } (-\infty,2] \end{cases}$

$f'(x)>0$ pe $(2,\infty) \Rightarrow \begin{cases} f_s \nearrow \text{ pe } [2,\infty) \\ f \nearrow \text{ pe } [2,\infty) \end{cases}$

PUNCTE CRITICE ȘI PUNCTE DE EXTREM FOLOSIND PRIMA DERIVATĂ

PUNCTE CRITICE

$x=\alpha$ pct CRITIC $\Leftrightarrow f'(\alpha)=0$

PUNCTE DE EXTREM

$x=\alpha$ pct de EXTREM $\Leftrightarrow x=\alpha$ verifică una din condițiile:

(1) $f'(\alpha)=0$, f' schimbă semnul în $x=\alpha$ și $\exists f(\alpha)$

(2) $f'(\alpha)=\backslash$, f' schimbă semnul în $x=\alpha$ și $\exists f(\alpha)$

(3) $x=\alpha$ este capăt închis al D_f pentru fct reconstante

Obs.: pt a găsi punctele de extrem:

E_1) calculăm $f'(x)$

E_2) rezolvăm $f'(x)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ eventuale rădăcini

E_3) facem tabel de variație folosind monotonia, de exemplu:

x		α_1		α_2		α_3	
f'	+ + +	0	− − −	‖	+ + +	0	+ + +
f	↗		↘		↗		↗

E_4) Dacă $f_1 \nearrow$ pe $(-\infty, \alpha_1)$, $f_1 \searrow$ pe (α_1, α_2) $\Rightarrow x=\alpha_1$ pct MAXIM, etc.

Ex 1: $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-12x+5$, se cer pct critice și pct de extrem

E_1) $f'(x)=6x-12$

E_2) $f'(x)=0 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=2 \in D_f$

E_3)

x	[−1		2	
f'	− − −	0	+ + +	
f	↘	−7	↗	

$f(2)=3\cdot 4-12\cdot 2+5=-7\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ pct critic: $x=2$

pct extrem: $x=-1$ pct MAXIM

$x=2$ pct MINIM

Ex 2: Se dă tabelul de variație pt funcția f

x	[−4		1		2		3		4		5		6)
f'	//	− −	‖	+	‖	−	‖	−	0	−	0	+	//
f	//	9	↘		↗ 5	↘ 3	↘ 1	↘ −2		↗ 8			//

$\Rightarrow$ pct critice: $x=4$ și $x=5$

pct de extrem

$x=-4$ (capăt închis al D_f)

$x=1$ nu e de extrem ($f'(1)=\backslash$, f' sch semnul în $x=1$ dar $\nexists f(1)$)

$x=2$ pct extrem (MAXIM)

$x=3$ nu e pct extrem (f' nu sch. semnul)

$x=5$ pct extrem (MINIM)

$x=6$ nu e pct de extrem (e capăt deschis al D_f)

CONVEXITATEA UNEI FUNCȚII — FOLOSIND DERIVATA DE ORDIN II

(M1)

E_1) se calculează $f'(x)$, $f''(x)$

E_2) dacă $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ convexă și G_f arată ∪

dacă $f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ concavă și G_f arată ∩

OSS1: • dacă $f''(\alpha)=0$ și f'' schimbă semnul în $x=\alpha \Rightarrow \alpha$ punct de inflexiune

• dacă $\nexists f''(\alpha)$ dar $\exists f'(\alpha) \in \mathbb{R}$ și f cont în $x=\alpha$ și f'' sch. semnul în $x=\alpha \Rightarrow \alpha$ pct de inflexiune

---

Exp 1: $f(x)=x^3-6x^2+5$, studiați convexitatea și determinați punctele de inflexiune

E_1) $f'(x)=3x^2-12x$

$f''(x)=6x-12$

E_2) $f''(x)=0 \Rightarrow x=2$

E_3)

x		2	
f''	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +$
f	∩		∪

$\Rightarrow f$ concavă pe $(-\infty, 2]$

f convexă pe $[2, \infty)$

și $x=2$ pct inflexiune

Exp 2: $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$, studiați convex. și determ pct inflexiune

E_1) $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $f''(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

E_2) cond $x \neq 0$, studiem cu definiția

dacă $\exists f''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{3}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x} = \frac{5}{3}\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ $\begin{matrix} f''_s(0)=-\infty \\ f''_d(0)=\infty \end{matrix}$

$\Rightarrow \nexists f''(0)$

E_3)

x		0	
f''	$-\ -\ -$	$\nexists$	$+\ +$
f	∩	0	∪

$\Rightarrow f$ concavă pe $(-\infty, 0]$

f convexă pe $[0, \infty)$

și $x=0$ pct inflexiune

Exp 3: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, convex, pct inflex

E_1) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, cond $x\neq 0$

E_2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=\infty \Rightarrow \exists f'(0)\in\overline{\mathbb{R}}$

E_3) $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $\nexists f''(0)$

dar f'' sch semnul în $x=0 \Rightarrow$ pct inflex.

DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI FOLOSIND MONOTONIA

(M1)

E_1) se trece totul în stânga, se consideră funcția $f(x)=$ expresia obținută, se alege D_f (eventuale condiții ce le impunem noi sau care erau date în ipoteză)

E_2) Calculăm $f'(x), f''(x), \ldots$ până găsim semnul unei derivate și eventualele rădăcini ale acelei derivate

E_3) Din derivata de ordin superior găsim monotonia funcției de grad inferior, calculăm limitele la capete (eventual doar o limită dacă e suficient), apoi semnul acestei derivate

E_4) Procedeul se repetă până obținem semnul funcției noastre

Exp.: Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x, \forall x>0$$

E_1) Inegalitatea e echivalentă cu $\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x < 0$, $\forall x>0 \Rightarrow$ fie $f(x)=\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

E_2) $f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{\frac{1+x^2}{1}}{1+x^2} = \frac{1-x^2-1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \le 0$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \notin D_f$

E_3)

x	0	∞
f'	$-\ -\ -\ -\ -$	
f	$\searrow$	

$f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x\right) \overset{0-0}{=\!=} 0$

$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x < 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x$

DETERMINAREA IMAGINII UNEI FUNCȚII (MULȚIMEA VALORILOR UNEI FUNCȚII) (N1)

E_1) se calculează $f'(x)$, se rezolvă $f'(x)=0$

E_2) se face tabel de variație

x				
f'				
f				

găsindu-se semnul lui $f'(x)$, monotonia și limitele la capetele D_f pentru $f(x)$

E_3) $Im\ f$ = reuniunea tuturor intervalelor de pe linia lui f pe care f este strict monotonă

Obs1: Dacă $Im\ f$ are toate capetele finite $\Rightarrow f$ MĂRGINITĂ, dacă $Im\ f$ are cel puțin un capăt infinit $\Rightarrow f$ NEMĂRGINITĂ

Obs2: pentru a studia mărginirea, e suficient să calculăm limitele la toate capetele D_f pe care f nu își schimbă forma și dacă toate sunt finite $\Rightarrow f$ mărginită, dacă cel puțin unul nu e finit $\Rightarrow f$ nemărginită

Ex1): Fie $f:(-2;5]\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=x^3-3x-5$. Găsiți mulțimea valorilor lui f

E_1) $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0\Rightarrow x^2=1$

$\Rightarrow x=\pm 1$

E_2)

x	$(-2$		-1		1		$5]$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-7	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	105

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=-8+6-5=-7$

$f(-1)=-1+3-5=-3$

$f(1)=1-3-5=-7$

$f(5)=125-15-5=105$

E_3) $Im\ f=(-7;-3]\cup[-7;-3]\cup[-7;105]=$

$=[-7;105]$ f mărginită

Ex2: Fie $f:(-2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3$

Se cere $Im\ f$

E_1) $f'(x)=2x$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

E_2)

x	$(-2$		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	∞

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=7$

$f(0)=3$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E_3) $Im\ f=[3;7)\cup[3;\infty)=[3;\infty)$

$\Rightarrow f$ nemărginită

STUDIEREA BIJECTIVITĂȚII UNEI FUNCȚII FOLOSIND ANALIZA MATEMATICĂ

(N1)

E_1) Se calculează $f'(x)$, se studiază monotonia lui $f(x)$

E_2) Dacă f strict monotonă $\Rightarrow$ f injectivă

Dacă f nu e strict monotonă $\Rightarrow$ f poate fi injectivă sau poate să nu fie injectivă, căutăm altă metodă (de obicei $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$)

E_3) Se face tabel de variație al lui f

x	
f'	
f	

E_4) Se calc. $\mathrm{Im}\, f$ = reuniunea tuturor intervalelor de pe linia lui $f(x)$ pe care f este strict monotonă

E_5) Dacă $\mathrm{Im}\, f = Cd_f \Rightarrow f$ surjectivă

Dacă $\mathrm{Im}\, f \neq Cd_f \Rightarrow f$ nu e surject

E_6) Deci f inj și surj $\Rightarrow f$ bijectivă

Exemplu 1: Arătați că $f:(1;\infty)\to(-1;\infty)$, $f(x)=x^3-3x+1$ este bijectivă

E_1) $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0\Rightarrow x^2=1$

$\Rightarrow x=\pm 1$. Dar, $x\in D_f \Rightarrow x=1$

E_2)

x	1	∞
f'	$+$	$+$
f	-1	$\nearrow$ ∞

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, calc. $f'(2)=12-3>0\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(1;\infty)$

$\Rightarrow f_\Delta\nearrow \Rightarrow f$ injectivă

E_3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^3-3x+1)=-1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-3x+1)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\overset{\infty(1-0+0)}{=\!=}\infty$

E_4) f cont pe $(1;\infty)$, $f_\Delta\nearrow$ pe $(1;\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=(-1;\infty)=Cd_f \Rightarrow f$ surj.

E_5) Deci f inj și f surj $\Rightarrow f$ biject.

Exemplu 2: Studiați dacă $f:[-2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+6x+1$ e a) injectivă b) surjectivă

E_1) $f'(x)=6x+6$, $f'(x)=0\Rightarrow x=-1\in D_f$

E_2)

x	-2	-1	∞
f'	$-$	0	$+$
f	1	$\searrow$ -2	$\nearrow$ ∞

$\Rightarrow f$ nu e strict monotonă, deci nu știm dacă f e inject sau nu, căutăm altă metodă

E_3) $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3x_1^2+6x_1+1=3x_2^2+6x_2+1$

$\Rightarrow 3(x_1^2-x_2^2)+6(x_1-x_2)=0\Rightarrow$

$3(x_1-x_2)(x_1+x_2)+6(x_1-x_2)=0$

$\Rightarrow 3(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0\Rightarrow \underset{\text{sau}}{x_1=x_2}$ / $x_1+x_2=-2$

E_4) deoarece $\exists x_1=-1{,}5$ și $x_2=-0{,}5$ cu $x_1\neq x_2$ și $x_1+x_2=-2\Rightarrow \exists x_1\neq x_2$ cu $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f$ NU e injectivă

E_5) pt surjectivitate, calculăm $\mathrm{Im}\, f$

$f(-2)=12-12+1=1$, $f(-1)=3-6+1=-2$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow \mathrm{Im}\, f=[-2;1]\cup[-2;\infty)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, f=[-2;\infty)$ și cum $Cd_f=\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ NU e surjectivă

RĂDĂCINI MULTIPLE

PENTRU UN POLINOM

1) $x=\alpha$ este rădăcină multiplă de ordin 2 a.î.

$f \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ este polinom} \\ f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)\neq 0 \end{cases}$

adică este de 2 ori rădăcină

2) $x=\alpha$ este rădăcină multiplă de ordin 3 a.î. f

$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ este polinom} \\ f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)=0,\ f'''(\alpha)\neq 0 \end{cases}$

adică este de 3 ori rădăcină

Ex1: $f(x)=e^x-x-1$, studiați ord. de multiplicitate pentru $x=0$

---

f nu e polinom $\Rightarrow x=0$ nu e răd. multiplă, deși e rădăcină pentru că $f(0)=e^0-0-1 \Rightarrow f(0)=0$

Ex2: $f(x)=x^2+2x+1$, ord de multiplicitate pentru $x=-1$

$E_1)\ f(-1)=(-1)^2+2(-1)+1=1-2+1=0$

$E_2)\ f'(x)=2x+2,\ f'(-1)=-2+2=0$

$E_3)\ f''(x)=2,\ f''(-1)=2\neq 0$

$\Rightarrow x=-1$ este răd multiplă de ordin 2

ȘIRUL LUI ROLLE

(N1)

- ne dă numărul de rădăcini reale ale unei ec. și intervalele în care sunt situate aceste rădăcini

E_1) se aduce ec la forma $f(x)=0$, se găsește D_f

E_2) se calc. $f'(x)$, se rezolvă $f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots$ rădăcini

E_3) se face tabelul de forma

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	∞
f'		0	0	0	
f					

unde linia lui f se completează cu limite la capetele D_f și valorile lui $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...

E_4) șirul lui Rolle este șirul semnelor din linia lui f (adică semnele de la limite la capete și semnele pt $f(x_1), f(x_2)\ldots$)

E_5) Dacă apar semne consecutive identice, atunci pe intervalul corespunzător lui $x \Rightarrow f$ nu are rădăcini

Dacă apar semne consecutive diferite, atunci pe intervalul corespunzător lui $x \Rightarrow f$ are o singură rădăcină reală

Dacă apare $0 \Rightarrow x_i$ pt care $f(x_i)=0$ este rădăcină. Dacă f este polinom, atunci x_i este rād. multiplă și pt. a-i găsi ordinul calculăm $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $f''(x_i)$, ... Dacă f nu e polinom atunci rădăcina x_i de mai sus nu e multiplă

Exemplu 1: Găsiți nr. rād. reale pentru $x^3-6x^2+9x-10=0$

E_1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$

E_2) $f'(x)=3x^2-12x+9$,

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \,|:3 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \end{cases}$

E_3)

x	$-\infty$		1		3	∞
f'			0		0	
f	$-\infty$		-6		-10	∞

$f(1)=1-6+9-10=-6$; $f(3)=27-54+27-10=-10$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E_4) șirul Rolle: $(-;-;-;+)$

$\Rightarrow$ o rād reală $x_1\in(3;\infty)$

Exemplu 2: Găsiți nr. rād reale pt $4x^5-25x^4+60x^3-70x^2+40x+1=0$

E_1) $f'(x)=20x^4-100x^3+180x^2-140x+40$

$f'(x)=0 \Rightarrow 20(x^4-5x^3+9x^2-7x+2)=0$

$\Rightarrow x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$

E_2) Cu Horner $\Rightarrow x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=2$

E_3)

x	$-\infty$		1		2	∞
f'			0		0	
f	∞		0		-423	∞

$f(1)=4-25+60-70+40+1=105-105=0$

$f(2)=4\cdot32-25\cdot16+60\cdot8-70\cdot4+40\cdot2+1=-423$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E_6) șirul lui Rolle: $(-;0;-;+)$

$\Rightarrow x_1=1$ rād multiplă, $x_2\in(2;\infty)$

E_7) Pt a-i vedea ordinul,

$f'(x)=20(x^4-5x^3+9x^2-7x+2) \Rightarrow f'(1)=0$

$f''(x)=20(4x^3-15x^2+18x-7) \Rightarrow f''(1)=0$

$f'''(x)=20(12x^2-30x+18) \Rightarrow f'''(1)=0$

$f^{IV}(x)=20(24x-30) \Rightarrow f^{IV}(1)=-120\neq0$

$\Rightarrow x=1$ rād de ordin 4

Exemplu 3: $\ln x - x = 0$, nr. rād

E_1) cond $x>0 \Rightarrow f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x - x$

E_2) $f'(x)=\frac{1}{x}-1$, $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1\in D_f$

E_3)

x	//	0		1	
f'	//			0	
f	//	$-\infty$		-1	$-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (\ln x - x) = -\infty$; $f(1)=\ln1-1=-1$;

$\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x - x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right) = -\infty$ ($\frac{\ln x}{x}\to0$)

E_4) Șirul Rolle: $(-;-;-) \Rightarrow$ 0 rād. reale

REGULILE LUI L'HOPITAL (N1)

Dacă se cere $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ și suntem în unul din cazurile $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$ sau $\boxed{\frac{0}{0}}$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ și se poate aplica recursiv în caz de nevoie.

Obs.: Dacă la un moment dat, după aplicarea lui l'H limita nu există, înseamnă că nu pot folosi l'H și că trebuie altă metodă

Obs 2: Dacă $x_n=\frac{f(n)}{g(n)}$ și se cere $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$, chiar dacă suntem în unul din cazurile $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sau $\frac{0}{0}$, nu putem aplica l'H ci trebuie să considerăm funcție ajutătoare cu domeniul $(0;\infty)$

Exp 1: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{5x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(5x)'}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{5}\overset{\frac{1}{\infty}}{=}0$

Exp 2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x}\overset{\frac{\infty+[-1,1]}{\infty-[-1,1]}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$ care nu există

$\Rightarrow$ nu pot folosi l'H $\Rightarrow$ caut o altă metodă

$l\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}\overset{\frac{1+0}{1-0}}{=}1$

deoarece $\sin x\in[-1,1]\Rightarrow\frac{\sin x}{x}\to 0$,

și $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}\overset{\frac{[-1,1]}{\infty}}{=}0$

Exp 3: $x_n=\frac{n^3}{\ln n+4}$, $\lim_n x_n=?$

E1) $\lim_n\frac{n^3}{\ln n+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

E2) Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{\ln x+4}$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\ln x+4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}3x^3=\infty$

E3) $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\ln n+4}=\infty$