# MATRICI. OPERAȚII CU MATRICI

1) definiție: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ înseamnă că A are m linii, n coloane și elem sunt nr. complexe

Obs 1: $a_{ij}$ este elementul de pe linia i, coloana j

Obs 2: ∃ matrice pătratică (nr. de linii egal cu nr de coloane) și, doar la matricile pătratice ∃ diag pp (\) și diag sec. (/) și urma matricii (suma elem. de pe diag pp) notată $\mathrm{Tr}(A) = t_A$

Obs 3: ∃ matrice unitate $I_n$ care e pătratică cu elem de pe diag pp egale cu 1 iar toate restul egale cu 0

Obs 4: ∃ matrice nulă $O_{m,n}$ care nu e neapărat pătratică dar care are toate elem. egale cu 0

2) operații cu matrici

a) egalitatea: $A = B \Leftrightarrow$ (sunt de același tip și au toate elem. corresp. egale între ele)

b) adunarea, scăderea doar dacă sunt de același tip și se adună, se scad pe fiecare element

c) înmulțirea cu un scalar (număr) se înmulț fiecare element cu acel număr

d) înmulțirea a două matrici - se înmulțește corespunzător fiecare element din prima linie cu fiecare elem din prima coloană, rezultatele se adună și se repetă procedeul

Obs 1: înmulț mătr nu e comutativă, dar e asociativă

e) transpusa unei matrici - inversează liniile cu coloanele

Obs: $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ și $^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

Obs 2: $\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists A \cdot B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$

---

Exp 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$ și

$a_{21} = 4$ iar $\mathrm{Tr}\, A = 1+5+9 = 15$

Exp 2: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exp 3: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ b) $A+C$ nu există

c) $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

d) $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2\cdot4+3\cdot6+4\cdot1 & 2\cdot5+3\cdot7+4\cdot2 \\ 5\cdot4+1\cdot6+2\cdot1 & 5\cdot5+1\cdot7+2\cdot2 \\ 4\cdot4+0\cdot6+5\cdot1 & 4\cdot5+0\cdot7+5\cdot2 \end{pmatrix}$

$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8+18+4 & 10+21+8 \\ 20+6+2 & 25+7+4 \\ 16+0+5 & 20+0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 39 \\ 28 & 36 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$

f) $C \cdot A$ nu există

g) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3\cdot2+1\cdot5+0\cdot4 & 3\cdot3+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot4+1\cdot2+0\cdot5 \\ 4\cdot2+0\cdot5-1\cdot4 & 4\cdot3+0\cdot1-1\cdot0 & 4\cdot4+0\cdot2-1\cdot5 \\ 2\cdot2+3\cdot5+4\cdot4 & 2\cdot3+3\cdot1+0\cdot4 & 2\cdot4+3\cdot2+4\cdot5 \end{pmatrix}$

h) $^tC = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

i) $^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

# DEFINIȚIA PUTERILOR UNEI MATRICI

$A^0 = I_n$ (e greșit $A^0 = 1$)

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ ori}}$

---

Exp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = ?$

---

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \not\exists$

Obs.: există $A^n$ doar dacă A este pătratică

Exp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = ?$

---

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

# CALCULUL PUTERILOR UNEI MATRICI PRIN INDUCȚIE MATEMATICĂ

$E_1$) se calculează $A^2, A^3, \ldots$ până observăm regula

$E_2$) se arată prin inducție rezultatul obținut pt $n \geq 2$

OBS 1: Dacă nu observăm regula, căutăm alte metode (Newton, șiruri sau trigonometrice)

---

Ex 1.: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se arate $A^n$

---

$E_1$) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2$) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3$) Obs. că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 2$

$E_4$) I $P(2)$: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adevărat

$E_5$) II Pp. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev

unde $P(k)$: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și

$P(k+1)$: $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3(k+1) \end{pmatrix}$ adică

$P(k+1)$: $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_6$) Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow$

$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \cdot A \Rightarrow$

$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(k+1)$ adev

$\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n \geq 2 \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

# CALCULAREA PUTERILOR UNEI MATRICI CU AJUTORUL BINOMULUI LUI NEWTON

$E_1$) se folosește atunci când nu întuim regula, se scrie
$A = I_n + B$ deci $B = A - I_n$

$E_2$) se calculează $B^2, B^3, B^4, \ldots$ până obținem o putere $p$ cu $B^p = O_n \Rightarrow B^s = O_n, \forall s \geq p$

$E_3$) se aplică Newton pentru
$A^n = (I_n + B)^n = C_n^0 I_n^n B^0 + C_n^1 I_n^{n-1} B + \ldots + C_n^n I_n^0 B^n$

$E_4$) se folosește că $I_n^t = I_n, \forall t \in \mathbb{N}$, $B^0 = I_n$ și că $I_n \cdot B^p = B^p$, then

$E_5$) se adună matricele obținute $\Rightarrow$ forma lui $A^n$

Obs.: deoarece s-a folosit o formulă nu mai e necesară inducția, însă pentru a fi siguri de rezultat putem demonstra prin inducție rezultatul obținut

---

Ex.: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cere $A^n = ?$, $\forall n \geq 1$

$E_1$) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2$) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3$) Nu observăm regula pentru $A^n$, încercăm Newton

$A = I_3 + B \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_4$) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_5$) $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$

$E_6$) $B^3 = O_3 \Rightarrow B^s = O_3, \forall s \geq 3$

$E_7$) $A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 I_3^n B^0 + C_n^1 I_3^{n-1} B + C_n^2 I_3^{n-2} B^2 + \ldots + C_n^n I_3^0 B^n =$
$= C_n^0 I_3 \cdot I_3 + C_n^1 I_3 B + C_n^2 I_3 B^2 + O_3$

$E_8$) Cum $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$
$\Rightarrow A^n = 1 \cdot I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & -3n + \frac{4n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 - 7n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

# DETERMINANȚI

1) există doar pt matrici pătratice și au ca valoare un număr

2) elementele se notează între bară și nu între paranteze rotunde ca la matrici

3) de ord I: $A=(a) \Rightarrow \det A=|a|=a$

de ord II: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

de ord III: $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow$

$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ — regula triunghiului

$=aei+bfg+dhc-ceg-dbi-hfa$

4) minorul elementului $a_{ij}$ - este determinantul obținut prin tăierea liniei i și a coloanei j, se not $m_{ij}$

5) complementul algebric pt $a_{ij}$ este egal cu $(-1)^{i+j}\cdot$(minorul corespunzător)

6) calcularea determ prin dezvolt după elem unei linii (sau coloane)

$\det A=\sum (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot m_{ij}$

Obs.: dezvoltarea după elem unei linii sau coloane e utilă la determ de ordin $\geq 4$

---

Exp 1: $A=(-3) \Rightarrow \det A=|-3|=-3$

Exp 2: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=$

$=2\cdot 1-4\cdot 3=2-12=-10$

Exp 3: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$

$=2\cdot 2\cdot 5+3\cdot 1\cdot 3+1\cdot 2\cdot 4-3\cdot 2\cdot 4-1\cdot 3\cdot 5-2\cdot 1\cdot 2=$

$=20+9+8-24-15-4=$

$=37-43=-6$

Exp 4: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

minorul pt $a_{23}$ este $m_{2,3}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=$

$=8-9=-1$

compl alg. pentru $a_{23}$ este

$A_{2,3}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1\cdot(8-9)=1$

Exp 5: Calculați $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$E_1$) Alegem o linie după care îl dezvoltăm, fie cea linie linia 3

$E_2$) $\det A \overset{l_3}{=}(-1)^{3+1}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}+$

$+(-1)^{3+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}+$

$+(-1)^{3+4}\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ și fiecare determinant de ord III se calculează

# PROPRIETĂȚI ALE DETERMINANȚILOR

- sunt valabile pentru determinanți de ordinul $n$, însă ca exemple vom da doar pt ordinul 3

**P1** $\det A = \det({}^tA)$, deci toate prop valabile pt linii sunt adev. și pt. coloane

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

---

**P2** dacă o linie (sau coloană) e formată doar din zerouri $\Rightarrow$ $\det A = 0$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_3=0}{=\!=} 0$

---

**P3** dacă din $A$ schimbăm 2 linii între ele (sau 2 coloane între ele) obținem $A'$ cu $\det A' = -\det A$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=\!=} - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

---

**P4** dacă 2 linii sunt identice (sau 2 coloane ident.) $\Rightarrow \det A = 0$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{L_2=L_3}{=\!=} 0$

---

**P5** dacă o linie e înmulțită cu $\alpha$ (sau o coloană cu $\alpha$) se poate scoate factor comun $\Rightarrow \det A' = \alpha \cdot \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

**P6** dacă toate elementele sunt înmulțite cu $\alpha \Rightarrow$ avem $A'$ cu $\det A' = \alpha^n \cdot \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5d & 5e & 5f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = 5^3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

---

**P7** se pot aduna toate celelalte linii la una fixată (sau toate celelalte coloane la una fixată) $\Rightarrow$ obținem $A'$ cu $\det A' = \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

**P8** dacă înmulțim o linie cu $\alpha$ și adunăm la altă linie (sau o coloană cu $\alpha$ și adunăm la altă coloană) $\Rightarrow A'$ cu $\det A' = \det A$

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{C_1+\alpha C_2 = C_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+\alpha b & b & c \\ d+\alpha e & e & f \\ g+\alpha h & h & i \end{vmatrix}$

**P9** doi determinanți se pot aduna doar dacă au toate liniile identice, cu excepția uneia, se copiază cele identice și se adună corespunzătoare diferite

Ex: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+m & h+n & i+p \end{vmatrix}$

**P10** dacă $A, B$ pătratice $\Rightarrow$

$\det(A^n) = (\det A)^n$ și

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

# FORMARE DE ZEROURI

$E_1$) aleg un element egal cu 1 (sau element egal cu $-1$) pe care îl numim pivot și vom forma zerouri pe linia ce conține pivotul (numită linie de pivotare)

$E_2$) coloana ce conține pivotul se numește coloană de pivotare

$E_3$) pentru a forma zerouri pe linia de pivotare, din fiecare coloană diferită de coloana de pivotare vom scădea sau adiuna coloana de pivotare înmulțită cu un număr corespunzător

$E_4$) se va folosi formula $\det A = (-1)^{l+c} \cdot (\text{pivot}) \cdot (\text{determinantul rămas prin tăierea liniei „l" și a coloanei „c"})$

Exp 1: calculați prin formare de zerouri $\det A$ pentru

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$E_1$) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & \boxed{1} \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1 - 5c_3 \to c_1 \\ c_2 - 2c_3 \to c_2 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2-20 & 3-8 & 4 \\ 5-5 & 2-2 & 1 \\ 0-15 & 2-6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -18 & -5 \\ -15 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (72 - 75) = -1 \cdot (-3) = 3$$

Obs.: rezultatele de la coloana 1, respectiv coloana 2 se puteau scrie direct ca în exemplul următor

Exp 2: calculați $\det A$ pt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$E_1$) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ \boxed{1} & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2 - 3c_1 \to c_2 \\ c_3 + 2c_1 \to c_3 \\ c_4 - 5c_1 \to c_4 \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & -8 \\ 4 & -9 & 10 & -18 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -13 & 10 & -23 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 & 8 \\ -9 & 10 & -18 \\ -13 & 10 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-690 - 720 + 1872 + 1040 - 540 + 1656) =$$

$$= 2618$$

Obs.: pt determinanți de ordin superior ($\geq 3$), nu există formulă directă

# GĂSIREA REZULTATULUI SUB FORMĂ DE PRODUS AL UNUI DETERMINANT

- se formează zerouri, se dă factor comun

Exp. 1 calculați, sub formă de produs,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = ?$$

$E_1)$ $\det A \xrightarrow[C_3 - C_1 \to C_3]{C_2 - C_1 \to C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$

$E_2)$ $\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$

$E_3)$ $\det A = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b^2+ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$

$E_4)$ $\det A = (b-a)(c-a)\left(c^2+ca+a^2-b^2-ba-a^2\right)$

$\det A = (b-a)(c-a)\left((c-b)(c+b)+a(c-b)\right)$

$\det A = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$

# (M2) RANGUL UNEI MATRICE (*)

$E_1$) dacă $A$ pătratică cu $n$ linii și $\det A \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = n$

$E_2$) dacă $A$ nu e pătratică sau dacă $A$ pătratică cu $\det A = 0$, găsim un minor de ord I nenul (de obicei cel din stg sus) și în acest caz $\operatorname{rang} A \geq 1$ (dacă toate elementele lui $A$ sunt $0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 0$)

$E_3$) dacă $\operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm minorul nenul anterior și obținem minori de ord II

$E_4$) dacă toți minorii de ord II obținuți sunt nuli $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 1$, dacă există un minor de ord II nenul $\Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$

$E_5$) dacă $\operatorname{rang} A \geq 2$, bordăm minorul nenul anterior și obținem minori de ord III

$E_6$) dacă toți minorii de ord III obținuți prin bordare sunt nuli $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, dacă există un minor de ord III nenul $\Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 3$

$E_7$) dacă $\operatorname{rang} A \geq 3$, bordăm minorul nenul anterior și obținem minori de ord IV

Obs.: Procedeul continuă sau până când toți minorii de un anumit ordin sunt nuli, sau până când nu mai putem borda

Obs 2.: $\operatorname{rang} A \leq \min(\text{nr liniii, nr. coloane})$

Obs 3: minorul cu care începem nu e obligatoriu să fie de ord I, poate avea orice ordin dar trebuie să fie nenul

---

Ex 1: $\operatorname{rang} A = ?$, pt $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_1$) $A$ pătratică, $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 0 + 60 + 2 - 28 - 9 - 0 =$

$= 62 - 37 = 25 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 3$

Ex 2.: $A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ \boxed{4} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se cere $\operatorname{rang} A$

$E_1$) $A$ pătratică,

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 40 + 6 - 40 - 6 - 0 =$

$= 46 - 46 = 0$

$E_2$) $|3| = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, îl bordăm

$E_3$) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 = -17 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, îl bordăm

$E_4$) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 40 + 6 - 40 - 6 - 0 =$

$= 46 - 46 = 0$

$E_5$) Fără alt minor de ord III obținut prin bordare $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

---

Ex 3.: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = ?$

$E_1$) $A$ nu e pătratică

$E_2$) $|-2| = -2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, îl bordăm $\Rightarrow$

$E_3$) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9 \neq 0 \Rightarrow$

$\operatorname{rang} A \geq 2$

$E_4$) Cum $A \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A \leq \min(2, 4) \Rightarrow \operatorname{rang} A \leq 2$

$E_5$) Din $\left.\begin{matrix} \operatorname{rang} A \geq 2 \\ \operatorname{rang} A \leq 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

# INVERSA UNEI MATRICI

**DEFINIȚIE:** Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dacă $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu

$$\begin{cases} A \cdot B = I_n \text{ și} \\ B \cdot A = I_n \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ inversabilă și $A^{-1} = B$

**Obs:** pentru a arăta că $A$ e inversabilă sunt 2 metode

met I: arăt. că $\det A \neq 0$

met II: arăt. că $\exists B$ cu $\begin{cases} A \cdot B = I_n \\ B \cdot A = I_n \end{cases}$

**Obs:** o matrice ce admite inversă se numește **NESINGULARĂ**

**CALCUL INVERSEI UNEI MATRICI**

$E_1$) calculăm $\det A$

$E_2$) dacă $\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1} \Rightarrow$ STOP

dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow E_3$)

$E_3$) calc. ${}^tA$

$E_4$) calc. din ${}^tA$ pe $A^*$ (matricea adjunctă) unde $a^*_{ij}$ este complementul algebric pt element respectiv, $a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ (determinantul obținut prin tăierea liniei $i$, coloanei $j$)

$E_5$) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

---

**Ex 1:** Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A^5 = I_n$, arătați că $A$ inversabilă și calculați inversa sa

$E_1$) $A^5 = I_n \Rightarrow \begin{cases} A \cdot A^4 = I_n \\ A^4 \cdot A = I_n \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ inversabilă și $A^{-1} = A^4$

**Ex 2:** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$E_1$) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 2 + 3 - 0 = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_2$) ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$E_3$) $A^* = ?$

$a^*_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$

$a^*_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 + 2) = -2$

$a^*_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$

$a^*_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 = -2$

$a^*_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$

$a^*_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 = -3$

$a^*_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$a^*_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

$a^*_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$E_4$) $A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_5$) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \Rightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

# (M2) STUDIEREA COMPATIBILITĂȚII UNUI SISTEM (*)

**T. KRONECKER-CAPELLI:** Un sist. e compatibil $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$ unde $\bar{A}$ este matricea extinsă, formată din $A$ prin bordare cu coloana termenilor liberi

Obs: deoarece $\bar{A}$ conține toate elem. lui $A \Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} \geq \operatorname{rang} A$ și când vom calcula $\operatorname{rang}\bar{A}$, vom porni direct cu minorul ce a dat $\operatorname{rang} A$ și vom borda doar cu elem din col. term. liberi

- dacă $A$ pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ COMPATIBIL, altfel

**T. ROUCHE:** Un sistem este compatibil $\Leftrightarrow$

[(toți minorii caracteristici sunt nuli) sau (nu există minori caracteristici)

unde $\Delta_c$ = minor caracteristic e format din $\Delta_p$ (minor principal) bordat cu câte una din liniile rămase și elem. corespunz din coloana termenilor liberi)]

- dacă $A$ pătratică cu $\det A \neq 0 \Rightarrow$ COMPAT, altfel

---

Exp: Studiați compatibilitatea sist.

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+2y-2z=5 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

met I: studiem dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\bar{A}$

$E_1$) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$E_2$) $\operatorname{rang} A = ?$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-2+2+2-2-2=0$

$E_3$) $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+2=0$,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, bordăm

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$E_4$) $\operatorname{rang}\bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$,

bordăm $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+5-6-6+5-2 = 10-12 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} \geq 3$, și cum $\bar{A} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} \leq 3 \Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} = 3$

$E_5$) $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang}\bar{A} = 3 \Rightarrow \operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}\bar{A}$

$\Rightarrow$ sist incompatibil

met II: calc. $\Delta_p$ și studiem ce se întâmplă cu $\Delta_c$

$E_1$) $\operatorname{rang} A = ?$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_2$) $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm $\Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+2=0$,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\exists$ altă bordare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$E_3$) singurul $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow \exists \Delta_c \neq 0 \Rightarrow$ sist incompatibil

Exp 2: Studiați compatibilitatea pt

$$\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+y-2z+t=2 \end{cases}$$

met I: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\operatorname{rang} A = ?$, $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$, cum

$A \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{C}) \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

$\operatorname{rang}\bar{A} = ?$, $\bar{A}$ conține $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ și cum

$\bar{A} \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{C}) \Rightarrow \operatorname{rang}\bar{A} = 2 \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\bar{A}$

$\Rightarrow$ sist compatibil

met II: ca mai sus, $\operatorname{rang} A = 2$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

și $\nexists \Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil

Obs: Un sistem care nu e compatibil se numește INCOMPATIBIL

# REZOLVAREA SISTEMELOR PRIN REGULA LUI CRAMER

– dacă $A$ pătratică cu $\det A \neq 0$ se poate aplica regula lui CRAMER

$E_1$) $\det A = \ldots$ și dacă $\det A = 0 \Rightarrow$ nu se poate folosi Cramer

dacă $\det A \neq 0 \Rightarrow E_2$)

$E_2$) se calculează $\Delta_x$ obținut din $\det A$ prin înlocuirea coloanei lui $x$ cu a termenilor liberi, analog $\Delta_y$ din $\det A$ prin înlocuirea coloanei lui $y$ cu a termenilor liberi, etc

$E_3$) se folosesc formulele: $x = \frac{\Delta_x}{\det A}$, $y = \frac{\Delta_y}{\det A}$, $z = \frac{\Delta_z}{\det A}$

Ex: $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$

$E_1$) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 4 - 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0$

deci se poate aplica Cramer

$E_2$) $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 5 + 14 - 5 - 8 - 7 = 14 - 29 = -15$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 4 + 10 - 7 - 5 + 8 = 22 - 19 = 3$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 7 + 16 - 4 - 14 + 10 = 26 - 20 = 6$

$E_3$) $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{-15}{-3} = 5$; $y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{3}{-3} = -1$; $z = \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{6}{-3} = -2$

Obs.: Condiția ca un sistem să aibă soluție unică (compat. determinat) este ca $A$ pătratică cu $\det A \neq 0$