PROPRIETĂȚI ALE PUTERILOR

N1

1) $a^0 = 1, \forall a \neq 0$

2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Obs.: nu există numărul 0^0 (nu se poate calcula)

5) $0^a = 0, \forall a \neq 0$

6) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

7) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

8) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Ex.: Calculați

$(2^3 \cdot 4^5) : 8^2$

$(2^3 \cdot 4^5) : 8^2 = (2^3 \cdot (2^2)^5) : (2^3)^2 =$

$= (2^3 \cdot 2^{10}) : 2^6 = 2^{13} : 2^6 =$

$= 2^7$

RADICALI DE ORDIN SUPERIOR

1) $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

2) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ și $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

3) $\sqrt[n]{x^n} = x$, $\forall\, x \geq 0$ și $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$

Obs.: ordinul oricărui radical este număr natural ≥ 2

Ex.: $\sqrt[3]{125} = 5$ pt că $5^3 = 125$

Ex 2: $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3$

Ex 3: $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

Ex 4: $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{4}} =$

$= 3^{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{5}{4}} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

CONDIȚII PENTRU RADICALI (N1)

TIP I: $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)$ adică ordin par

Cond: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in I_1 \\ g(x) \geq 0 \Rightarrow x \in I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2$

TIP II: $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ adică ordin impar

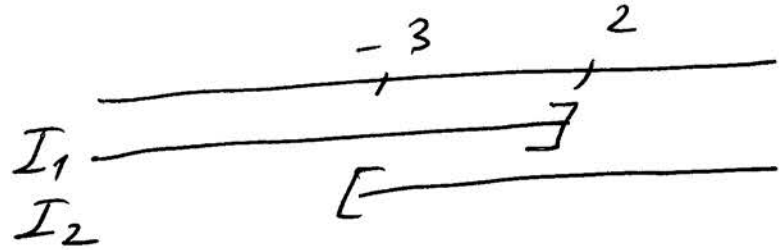
Cond: $x \in \mathbb{R}$ (sau nu punem nicio cond.)

Obs: a pune condiții este același lucru cu a avea sens expresia

Exp: $\sqrt[4]{2-x} = x+3$. Se cere I_c

Cond: $\begin{cases} 2-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2] = I_1 \\ x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2$



$\Rightarrow I_c = [-3, 2]$

Exp 2: $\sqrt[5]{2-x} = x+3$, se cere I_c

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow I_c = \mathbb{R}$

FORMULA RADICALILOR DUBLI (COMPUȘI) (N1)

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad \text{și}$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Obs.: formula e utilă doar dacă A^2-B este pătrat perfect (pentru a scăpa de un radical)

Exp: Arătați că $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{12}}$ este natural

$$E_1)\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-\sqrt{4^2\cdot 3}}=\sqrt{7-\sqrt{48}}=$$

$$=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}-\sqrt{\frac{6}{2}}=2-\sqrt{3}$$

$$E_2)\ \sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}-\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{3}-1$$

$$E_3)\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=1\in\mathbb{N}$$

Exp 2: Calculați $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

CALCULAREA UNEI SUME DE DOI RADICALI DE ORDIN 3 CONJUGAȚI (N1)

E_1) Se notează cu N numărul cerut $\Rightarrow N=\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$

E_2) Se calculează N^3 (se ridică la puterea a 3-a) folosind: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ sau

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

E_3) se înlocuiește $a+b$ sau $a-b$ cu $N\Rightarrow$ ec. de gr III

E_4) se face Horner $\Rightarrow$ $\begin{cases} N_1=d \\ \text{sau} \\ \text{ec. gr II în } N=0 \text{ care are întotdeauna } \Delta<0 \end{cases}$

Exp.: Calculați: $N=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

E_1) $N=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\,|(\,)^3 \Rightarrow N^3=\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3=$

$N^3=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$

E_2) $N^3=40+3\sqrt[3]{20^2-(14\sqrt{2})^2}\cdot N\Rightarrow N^3=40+3\sqrt[3]{8}\cdot N\Rightarrow$

$\Rightarrow N^3=40+6N\Rightarrow N^3-6N-40=0$

E_3) Horner, $\Delta_{-40}=\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\dots\}$

	N^3	N^2	N	N^0
	1	0	−6	−40
1	1	1	−5	−45 ≠ 0
2	1	2	−2	−44 ≠ 0
4	1	4	10	0

$\Rightarrow (N-4)(N^2+4N+10)=0\Rightarrow \begin{cases} N=4 \\ \text{sau} \\ N^2+4N+10=0 \end{cases}$

$\Delta=16-40<0$ Fals

$\Rightarrow N=4$

DEFINIȚIA LOGARITMULUI. SCRIEREA UNUI NUMĂR CA UN LOGARITM

(N1)

DEFINIȚIE

$\log_b A = N \Leftrightarrow A = b^N$

Obs.: b se numește bază

A se numește argument

SCRIEREA UNUI NR. CA LOG.

folosim $N = \log_b b^N$

Ex 1: $x = ?$ dacă

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_x 8 = 3$

c) $\log_2 \frac{1}{4} = x$

---

a) $\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 = 32$

b) $\log_x 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = x^3 \Leftrightarrow x = 2$

c) $\log_2 \frac{1}{4} = x \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2^x$

$\Leftrightarrow 2^{-2} = 2^x \Rightarrow x = -2$

Ex: scrieți pe $N = 3$ în baza

a) $b = 2$ b) $b = 3$ c) $b = \frac{1}{2}$

---

a) $3 = \log_2 2^3 \Rightarrow 3 = \log_2 8$

b) $3 = \log_3 3^3 \Leftrightarrow 3 = \log_3 27$

c) $3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

CONDIȚII CE APAR LA LOGARITMI

Dacă $\log_b A = N \Rightarrow$

cond.: $\begin{cases} b>0 \Rightarrow x \in I_1 \\ b \neq 1 \Rightarrow x \in I_2 \\ A>0 \Rightarrow x \in I_3 \end{cases} \Rightarrow I_C = I_1 \cap I_2 \cap I_3$

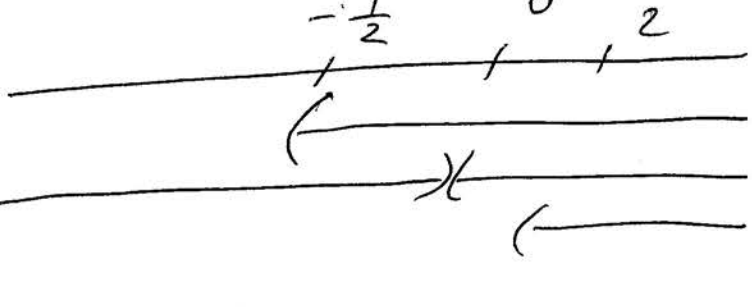
Obs.: Dacă b sau A sunt numere, atunci pentru ele nu se mai pun condiții

Exp 1: $\log_{2x+1}(3x-6)$, x care I_C

Cond: $\begin{cases} 2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty) \\ 2x+1 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ 3x-6>0 \Rightarrow 3x>6 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x \in (2, \infty) \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 \cap I_3$

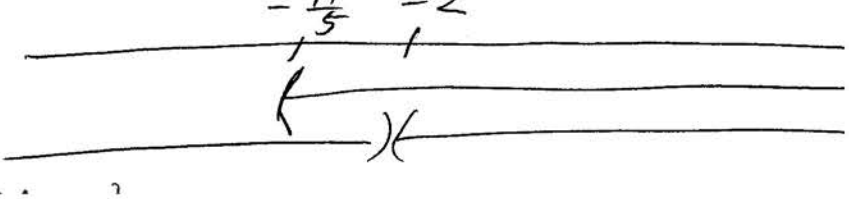
$\Rightarrow I_C = (2, \infty)$



Exp 2: $\log_{5x+11} 4$, x care I_C

Cond: $\begin{cases} 5x+11>0 \Rightarrow x>-\frac{11}{5} \Rightarrow x \in (-\frac{11}{5}, \infty) = I_1 \\ 5x+11 \neq 1 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2$



PROPRIETĂȚI ALE LOGARITMILOR (N1)

a) $\log_b 1 = 0$

b) $\log_b b = 1$

c) $\log_b A + \log_b B = \log_b (A \cdot B)$

d) $\log_b A - \log_b B = \log_b \frac{A}{B}$

e) $\log_b A^n = n \log_b A$

f) $\log_{b^n} A = \frac{1}{n} \log_b A$

g) $\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_b A$

h) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

i) $a^{n \log_b c} = c^{n \log_b a}$

j) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

k) schimbarea bazei: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Obs: logaritm zecimal $\boxed{\log_{10} A = \lg A}$

logaritm natural $\boxed{\log_e A = \ln A}$ unde

$e = 2,7\ldots$ nr. EULER.

Ex: Calculați: a) $\log_2 5 + \log_8 81$

b) Schimbați în baza 3 numărul $\log_2 7$

---

a) $\log_2 5 + \log_8 81 = \log_2 5 + \log_{2^3} 3^4 =$

$= \log_2 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 \log_2 3 = \log_2 5 + \frac{4}{3} \log_2 3 =$

$= \log_2 5 + \log_2 3^{\frac{4}{3}} = \log_2 (5 \cdot 3^{\frac{4}{3}})$

b) $\log_2 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2}$

COMPARARE DE EXPONENȚIALE, LOGARITMI, RADICALI (N1)

1) COMPARARE EXPONENȚIALE

$b \in (0;1)$ avem $(b^x < b^y \Leftrightarrow x > y)$

$b \in (1;\infty)$ avem $(b^x < b^y \Leftrightarrow x < y)$

2) COMPARARE LOGARITMI

$b \in (0;1)$ avem $(\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x > y)$

$b \in (1;\infty)$ avem $(\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x < y)$

3) COMPARARE DE RADICALI DE ORDIN DIFERIT

E_1) se aduc la același ordin folosind $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \cdot p]{x^p}$

E_2) se compară cantitățile de sub radicali

Exp 1: rezolvați

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^5$

b) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^x$

---

a) $b = \frac{2}{3} \in (0;1)$ și $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^5$

$\Rightarrow x < 5 \Rightarrow x \in (-\infty; 5)$

b) $b = \frac{5}{2} \in (1;\infty)$ și $\left(\frac{5}{2}\right)^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^x$

$\Rightarrow 2 < x \Rightarrow x \in (2;\infty)$

Exp 2: rezolvați

a) $\log_5 x < \log_5 2$

b) $\log_{\frac{2}{5}} x < \log_{\frac{2}{5}} 3$

---

a) Cond: $x > 0 \Rightarrow x \in (0;\infty)$

$b = 5 > 1$ și $\log_5 x < \log_5 2$

$\Rightarrow x < 2 \xrightarrow{\text{cond}} x \in (0;2)$

b) Cond.: $x > 0 \Rightarrow x \in (0;\infty)$

$b = \frac{2}{5} \in (0;1)$ și $\log_{\frac{2}{5}} x < \log_{\frac{2}{5}} 3$

Exp 3: comparați $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{13}$

---

ordinul comun este 6

$\Rightarrow a = \sqrt{5} = \sqrt[2\cdot3]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

$b = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

$c = \sqrt[6]{13}$

Deoarece $4 < 13 < 125$

$\Rightarrow b < c < a$

Exp 4: Comparați $\log_3 5$ cu 2

E_1) $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$

E_2) $b = 3 > 1$ și $5 < 9$

$\Rightarrow \log_3 5 < \log_3 9 \Rightarrow \log_3 5 < 2$

FORMA ALGEBRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

1) $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ și } i^2 = -1\}$, de obicei nr. complexe se notează cu z

Exp 1: $z = 2 \in \mathbb{C}$ pt că $a=2, b=0$

$z = 4-5i \in \mathbb{C}$ pt că $a=4, b=-5$

$z = -2i \in \mathbb{C}$ pt că $a=0, b=-2$

Obs 1: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, adică orice număr real e complex

2) dacă $z = a+bi \Rightarrow$ parte reală este a, not $\operatorname{Re} z = a$

parte imaginară este bi

coef părții imaginare este b, not $\operatorname{Im} z = b$

$\Rightarrow z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \cdot i$, deci $\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ și $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

Exp: $z = 7-2i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 7, \operatorname{Im} z = -2$

3) număr PUR COMPLEX $\Leftrightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow b \neq 0$

număr PUR IMAGINAR $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* i \Leftrightarrow \begin{cases} z = bi \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

număr REAL $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$

Exp: $z_1 = 3i$ e PUR IMAGINAR și PUR COMPLEX

$z_2 = 2-5i$ e PUR COMPLEX, nu e PUR IMAGINAR

4) AFIXUL PUNCTULUI $M(a,b)$ este $z = a+bi$

IMAGINEA NUMĂRULUI COMPLEX $z = a+bi$ este $M(a,b)$

Exp: afixul pt $M(-1,3)$ este $z = -1+3i$

imaginea pt $z = 3-5i$ este $M(3,-5)$

OPERAȚII CU NR. COMPLEXE (N1)

1) EGALITATEA: Dacă $\left.\begin{matrix} a+bi=c+di \\ a,b,c,d\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

2) ADUNARE, SCĂDERE, ÎNMULȚIRE, ÎMPĂRȚIRE, PUTERE

Dacă $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i \Rightarrow$

a) $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

b) $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

c) $z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2$

$\Rightarrow z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$

d) $z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\overset{\cdot\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}}{=}\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_1-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$

e) $z_1^n=(a_1+b_1i)^n$ și sau formulă, sau înmulțim parantezele

Obs.: nu se memorează relațiile ci se calculează pentru exemplele noastre

Exp1: $x,y\in\mathbb{R}$, $x,y=?$ dacă $3-2x+(5-y)i=y-x+3xi$

Din $\left.\begin{matrix} 3-2x+(5-y)i=y-x\ 5xi \\ x,y\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3-2x=y-x \\ 5-y=3x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x-y=-3 \\ -3x-y=-5 \end{cases} \Big|\cdot(-1)$ și adun $\Rightarrow -2x=-2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\Rightarrow -1-y=-3 \Rightarrow \boxed{y=2}$

Exp2: $z_1=5-4i$, $z_2=3+2i$, se cere a) z_1+z_2 b) $z_1\cdot z_2$ c) $z_1:z_2$ d) z_1^2

a) $z_1+z_2=(5-4i)+(3+2i)=(5+3)+(-4+2)i=8-2i$

b) $z_1\cdot z_2=(5-4i)(3+2i)=15+10i-12i-8i^2=(15+8)+(10-12)i=23-2i$

c) $z_1:z_2=\frac{5-4i}{3+2i}\overset{\cdot 3-2i}{=}\frac{(5-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{15-10i-12i-8i^2}{3^2-4i^2}=\frac{23-22i}{25}=\frac{23}{25}-\frac{22}{25}i$

d) $z_1^2=(5-4i)^2=25-40i+16i^2=25-40i-16=9-40i$

CALCULAREA PUTERILOR LUI i (N1)

$i^0 = 1$ $\quad i^{4n} = i^0 = 1$

- deoarece $i^1 = i$ $\quad i^{4n+1} = i^1 = i$

$i^2 = -1 \Rightarrow$ $\quad i^{4n+2} = i^2 = -1$

$i^3 = -i$ $\quad i^{4n+3} = i^3 = -i$

$i^4 = 1$

- pentru a calcula puterile mari ale lui i, împărțim puterea la 4, scriem proba împărțirii și folosim relațiile de mai sus

Exp.: $i^{2475} = ?$

$2475 \mid 4$

$24 \quad 618$

$==7$

4

35

32

$=3$

$\Rightarrow 2475 = 4 \cdot 618 + 3$

$\Rightarrow i^{2475} = i^{4 \cdot 618 + 3} = i^3 = -i$

CONJUGATUL UNUI NUMĂR COMPLEX (N1)

- dacă $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$

Obs.: conjugatul schimbă semnul din fața lui i

Obs 2.: conjugatul are proprietățile:

a) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

d) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Obs 3.: $z+\bar{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a \Rightarrow z+\bar{z} \in \mathbb{R}$

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Exp 1: $z = 4-3i \Rightarrow \bar{z} = 4+3i$

Exp 2.: $z = -3i \Rightarrow \bar{z} = 3i$

Exp 3: $z = 5 \Rightarrow \bar{z} = 5$

Exp 4: $z = \left(\frac{5-2i}{5+2i}\right)^5 \Rightarrow \bar{z} = \overline{\left(\frac{5-2i}{5+2i}\right)^5} = \left(\overline{\frac{5-2i}{5+2i}}\right)^5 =$

$= \left(\frac{\overline{5-2i}}{\overline{5+2i}}\right)^5 = \left(\frac{5+2i}{5-2i}\right)^5$

MODULUL UNUI NUMĂR COMPLEX

$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Obs.: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ și $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ și

$|z^n| = |z|^n$ și $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Exp.: $z = 2 - 3i$, $|z| = ?$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Exp2: $z = \frac{7 + 12i}{-12 + 7i}$, $|z| = ?$

$$|z| = \left|\frac{7+12i}{-12+7i}\right| = \frac{|7+12i|}{|-12+7i|} = \frac{\sqrt{7^2+12^2}}{\sqrt{(-12)^2+7^2}} =$$

Exp3: $z = (2-3i)^{200}$, $|z| = ?$

$$|z| = \left|(2-3i)^{200}\right| = |2-3i|^{200} =$$

$$= \left(\sqrt{2^2+(-3)^2}\right)^{200} = \sqrt{13}^{200} =$$

$$= 13^{100}$$

REZOLVAREA ECUAȚIILOR DE GRII ÎN NUMERE COMPLEXE (N1)

E_1) se folosește $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

E_2) dacă $\Delta=-d<0 \Rightarrow \Delta=di^2$

dacă $\Delta=a+bi$, se încearcă scrierea lui $a+bi$ ca $(m+ni)^2$ folosind că $i^2=-1$.

Dacă nu intuim $(m+ni)^2$, atunci notăm $a+bi=(m+ni)^2 \Leftrightarrow$

$a+bi=m^2+2mni-n^2 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m^2-n^2=a \\ 2mn=b \end{cases}$ și este un sistem omogen, care se rezolvă prin metoda cunoscută

Ex 1: rezolvați: $z^2+z+5=0$

$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}$

$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{19i^2}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{19}}{2}$

Ex 2: rezolvați $z^2+iz-i-1=0$

$z_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4\cdot 1(-i-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2+4i+4}}{2}$

$=\frac{-i\pm\sqrt{(i+2)^2}}{2}=\frac{-i\pm(i+2)}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{-i+i+2}{2}=1 \\ z_2=\frac{-i-i-2}{2}=-i-1 \end{cases}$

Ex 3: rezolvați $z^2+iz-i-1=0$

$z_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4\cdot 1(-i-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2+4i+4}}{2}$

Dacă nu observăm scrierea ca pătrat perfect pt. i^2+4i+4 atunci

$z_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{-1+4i+4}}{2}=\frac{-i\pm\sqrt{3+4i}}{2}$

Fie $3+4i=(m+ni)^2 \Rightarrow 3+4i=m^2+2mni-n^2$

$\Rightarrow \begin{cases} m^2-n^2=3 \\ 2mn=4 \end{cases}$, sistem omogen

notăm $n=tm \Rightarrow$

$\begin{cases} m^2-t^2m^2=3 \\ m\cdot tm=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2(1-t^2)=3 \\ tm^2=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{m^2(1-t^2)}{m^2t}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2-2t^2=3t$

$\Rightarrow 2t^2+3t-2=0$

$t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}$ $\begin{matrix}\nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -2\end{matrix}$

Cazul I: $t=\frac{1}{2}$ și $tm^2=2 \Rightarrow \frac{1}{2}m^2=2$

$\Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$ și $n=tm$

$\Rightarrow$ 1) $m_1=2$, $n_1=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$\Rightarrow 3+4i=(2+i)^2$

2) $m_2=-2$, $n_1=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$

$\Rightarrow 3+4i=(-2-i)^2$

Cazul II: $t=-2$ și $tm^2=2 \Rightarrow -2m^2=2$

$\Rightarrow m^2=-1$ și $m\in\mathbb{R}$, k.o.

Deci, $z_{1,2}=\frac{-i\pm(2+i)}{2}$ etc

FUNCȚII INJECTIVE

(N1)

sunt mai multe metode

1) f injectivă $\Leftrightarrow$
$(\forall x_1, x_2 \in D_f$ cu $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2)$

sau

2) f injectivă $\Leftrightarrow$
($\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ are cel mult o soluție $x \in D_f$)

sau

3) f injectivă $\Leftrightarrow$
($\forall y \in Cd_f$, paralele prin y la Ox $\cap G_f$ în cel mult 1 pct $x \in D_f$)

Obs 1.: dacă încercăm să arătăm că f e injectivă cu metodele anterioare și nu iese, trebuie să dăm un contraexemplu, așadar

f NU E INJECTIVĂ $\Leftrightarrow$
$\exists x_1 \neq x_2 \in D_f$ cu $f(x_1)=f(x_2)$ sau
$\exists y \in Cd_f$ cu ec. $f(x)=y$ are cel puțin două soluții $x \in D_f$ sau
$\exists y \in Cd_f$ cu // prin y la Ox $\cap G_f$ în cel puțin 2 puncte

Obs 2: metoda 3, cea cu paralele la Ox nu prea e punctată maxim

---

Exp 1: $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$
studiați injectivitatea lui f

met I: $\forall x_1, x_2 \in (1,\infty)$ cu $f(x_1)=f(x_2)$
$\Rightarrow 3x_1+1=3x_2+1 \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ injectivă

met II: $\forall y \in \mathbb{R}$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow$
$3x+1=y \Rightarrow x=\frac{y-1}{3}$
dacă $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y-1}{3} \in \mathbb{R}$
și dacă $x=\frac{y-1}{3} \in (1,\infty) \Rightarrow$ soluție
dacă $x=\frac{y-1}{3} \notin (1,\infty) \Rightarrow$ nu e soluție
$\Rightarrow$ ec are cel mult o soluție $x \in D_f$
$\Rightarrow f$ injectivă

Exp 2: $f:(-\infty,0] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$
Studiați injectivitatea lui f

met I: $\forall x_1, x_2 \in (-\infty,0]$ cu $f(x_1)=f(x_2)$
$\Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$ și cum
$x_1, x_2 \in (-\infty,0] \Rightarrow$ au același semn
$\Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ inj

met II: $\forall y \in \mathbb{R}$ ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$
$y \geq 0$: $x=\pm\sqrt{y}$ sau; $x \in (-\infty,0]$ $\Rightarrow$ $x=-\sqrt{y}$ sau $\nexists x$
$y<0$: $\nexists x$
$\Rightarrow f$ injectivă

met III:

$\Rightarrow$ $\forall$ paralelă $\cap G_f$ în cel mult 1 pct

Exp 3: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, inj f

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$,
deci nu putem arăta că $x_1=x_2$
Căutăm un contraexemplu,
$\exists x_1=3, x_2=-3$ cu $f(x_1)=f(x_2)$
și $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f$ nu e injectivă

FUNCȚII SURJECTIVE

sunt mai multe metode

f SURJECTIVĂ $\Leftrightarrow$

$$Im f = Cd f.$$

sau

$\forall y \in Cd f$, ec. $f(x)=y$ are cel puțin o soluție $x \in D_f$

sau

$\forall y \in Cd f$, $\parallel$ prin y la $Ox \cap G_f$ în cel puțin 1 pct $x \in D_f$

Obs 1: dacă încercăm să arătăm că fct f e surjectivă și nu ieșe cu metodele anterioare, trebuie să dăm un contraexemplu, așadar

f NU E SURJECTIVĂ $\Leftrightarrow$

$$Im f \neq Cd f$$

sau

$\exists y \in Cd f$ a.î. ec. $f(x)=y$ nu are nicio soluție $x \in D_f$ sau

$\exists y \in Cd f$ $\parallel$ prin y la Ox și G_f

Obs 3: metoda 3, cea cu $\parallel$ la Ox nu e punctată cu maxim

---

Ex 1.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x)=[x]$ studiați surjectivitatea lui f.

met I: $\forall y \in \mathbb{Z}$, ar trebui să $\exists x \in \mathbb{R}$ cu $f(x)=y$ adică $[x]=y$ care e adev pt că $\forall y \in \mathbb{Z}$ putem lua x de forma $x = y+0,1$ cu $[x]=y \Rightarrow$

$\Rightarrow Im f = Cd f \Rightarrow f$ surjed.

Ex 2.: $f: (1;\infty) \to (4;\infty)$, $f(x)=3x+1$ studiați surjectivitatea lui f

$\forall y \in (4;\infty)$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow 3x+1=y$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3}$.

Dar, $y>4 \Rightarrow \frac{y-1}{3} > 1 \Rightarrow x \in (1;\infty)$

$\Rightarrow \forall y \in Cd f$, ec. $f(x)=y$ are cel puțin o sol $x \in D_f \Rightarrow f$ surjectivă

Ex 3: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, studiați surjectivitatea lui f

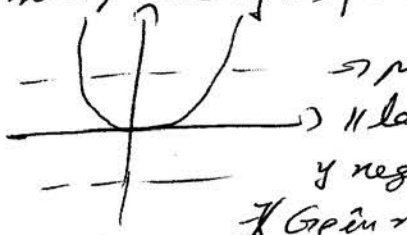
$\forall y \in \mathbb{R}$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2 = y$

$\overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \pm\sqrt{y}$ deci pot fi variante

căutăm un contraexemplu

Pt $y=-1$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=-1$ nu are soluții $x \in D_f \Rightarrow f$ nu e surject.

met II:



$\Rightarrow$ putem duce $\parallel$ la Ox prin y negativ care nu $\not\parallel G_f$ în niciun pct

$\Rightarrow f$ nu e surjectivă

Ex 4: $f: \mathbb{R} \to [0;\infty)$, $f(x)=x^2$, studiați surjectivitatea lui f.

$\forall y \in [0;\infty)$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$\overset{y \geq 0}{\Rightarrow} x = \pm\sqrt{y} \overset{x \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} x = \pm\sqrt{y}$

$\Rightarrow \forall y \in [0;\infty)$, $\exists x \in \mathbb{R}$ cu $f(x)=y$

$\Rightarrow f$ surjectivă

met II:



$\Rightarrow \forall \parallel$ prin y la $Ox \cap G_f$ în cel puțin 1 pct $\Rightarrow f$ surjectivă

FUNCȚII BIJECTIVE

sunt mai multe metode

f BIJECTIVĂ $\Leftrightarrow$

$\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ are <u>exact</u> o soluție $x \in D_f$

sau

$\forall y \in Cd_f$, $\parallel$ prin y la $Ox \cap G_f$ în exact un punct $x \in D_f$

sau

arăt. că f inj și că f surject cu orice metodă

<u>Obs 1</u>: Pt a arăta că f nu e bijectivă, este obligatoriu să dăm un contraexemplu

<u>Obs 2</u>: metoda grafică deși e foarte utilă, e considerată intuitivă și nu e punctată maxim

<u>Obs 3</u>: o funcție bijectivă $\Leftrightarrow$ fct inversabilă

<u>Exp 1</u>: $f:(-\infty;0] \to [0;\infty)$, $f(x)=x^2$

<u>Studiați</u> bijectivitatea lui f

$\forall y \in [0;\infty)$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$\overset{y\geq 0}{\Longrightarrow} x=\pm\sqrt{y} \overset{x\leq 0}{\Longrightarrow} x=-\sqrt{y}$

$\Rightarrow \forall y \in [0;\infty)$, ec. $f(x)=y$ are exact o soluție $x \in D_f \Rightarrow f$ e bijectivă

<u>Exp 2</u>: $f:(-\infty;0] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Studiați bijectivitatea lui f.

$\forall y \in \mathbb{R}$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$\Rightarrow \begin{cases} y\geq 0 & x=\pm\sqrt{y} \text{ sau} \\ y<0 & \nexists x \end{cases} \overset{x\leq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} y\geq 0 & x=-\sqrt{y} \text{ sau} \\ y<0 & \nexists x \end{cases}$

$\Rightarrow$ sunt variante pt y (cele $y<0$) pt care ec. $f(x)=y$ nu are soluție

Căutăm un contraexemplu, pt $y=-2 \Rightarrow$ ec $f(x)=-2 \Leftrightarrow x^2=-2$ nu are soluție $x \in D_f \Rightarrow f$ nu e bijectivă

INVERSA UNEI FUNCȚII

f inversabilă $\Leftrightarrow$ f bijectivă

Obs.: inversa funcției f se notează f^{-1} dar $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

Obs 2: dacă se cere doar valoarea funcției inverse într-o valoare, atunci $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

Obs 3: dacă $f: A \to B$ atunci $f^{-1}: B \to A$

Pt a găsi inversa unei fct,

E_1) se arată că f bijectivă (de obicei cu ec. $f(x)=y$ are sol unică)

E_2) se găsește $x = \ldots$ în fct de y

E_3) $f^{-1}(y)=x \Rightarrow f^{-1}(y)= \ldots$ în fct de y, se revine la notația cu x,

$f^{-1}(x) = \ldots$ în fct de x

E_4) dacă $f: A \to B$ atunci $f^{-1}: B \to A$

Exp.: Fie $f(x)=3^x+x^3+5$, se știe că f bijectivă, se cere $f^{-1}(9)$

E_1) $f^{-1}(9)=b \Leftrightarrow f(b)=9$

E_2) observăm că $f(1)=9$ și cum f bijectivă $\Rightarrow b=1$ sol. unică $\Rightarrow f^{-1}(9)=1$

Exp 2.: $f:(1;5] \to (3;11]$, $f(x)=2x+1$, studiați dacă f inversabilă și determinați $f^{-1}(x)$

E_1) $\forall y \in (3;11]$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow 2x+1=y \Leftrightarrow x=\frac{y-1}{2}$

E_2) $y \in (3;11] \Rightarrow y-1 \in (2;10] \Rightarrow \frac{y-1}{2} \in (1;5] \Rightarrow x \in (1;5] \Rightarrow x \in D_f$

$\Rightarrow \forall y \in C_f$, ec. $f(x)=y$ are exact o soluție $x \in D_f \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă

E_3) $f^{-1}(y)=x \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y-1}{2}$ și revenind la notația în x

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$,

$f^{-1}:(3;11] \to (1;5]$

EC. IRAȚIONALE DE TIPUL (N1)

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

E_1) Condiții

n par Cond.: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \Rightarrow I_1 \\ g(x) \geq 0 \Rightarrow I_2 \end{cases}$

n par

$I_c = I_1 \cap I_2$

n impar cond: $x \in \mathbb{R}$

Obs.: putem să nu punem condiții, dar atunci obținem soluții posibile pe care

rămânem obligați să le verificăm în ec. inițială

E_2) $\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \mid ()^n$

$\Rightarrow f(x) = (g(x))^n$ unde $(g(x))^n$ se calculează cu formula

E_3) soluțiile posibile se verifică sau în I_c sau în ec inițială și se aleg doar cele convenabile

---

Ex 1: rezolvați $\sqrt{x-1} = x-3$

E_1) $\sqrt{x-1} = x-3 \mid ()^2 \Rightarrow$

$x-1 = (x-3)^2 \Rightarrow x-1 = x^2-6x+9$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

E_2) $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ soluții posibile $x_1 = 5, x_2 = 2$

E_3) le verificăm în ec. inițială

$x_1 = 5 \Rightarrow \sqrt{5-1} = 5-3 \Leftrightarrow 2 = 2$ OK

$\Rightarrow x_1 = 5$ soluție

$x_2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2-1} = 2-3 \Leftrightarrow 1 = -1$ KO

$\Rightarrow x_2 = 2$ nu e sol

S_g: $x \in \{5\}$

Ex 2: rezolvați: $\sqrt[3]{x^3-1} = x-1$

E_1) $\sqrt[3]{x^3-1} = x-1 \mid ()^3$

$x^3 - 1 = (x-1)^3 \Rightarrow$

$x^3 - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$

$3x(x-1) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1\}$ sol posibile

E_2) le verificăm în ec inițială

$x_1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = -1 \Leftrightarrow -1 = -1$ OK

$x_2 = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ OK

S_g: $x \in \{0, 1\}$

EC. EXPONENȚIALE DE TIPUL (N11)

$\alpha a^{x+1} + \beta a^x + \gamma = 0$ (cu notație)

E_1) Se scriu toate puterile în funcție de a^x

E_2) se not. $a^x = t$, se rezolvă ec. apoi găsim x

Obs.: Dacă $a^x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$, dacă t nu poate fi scris ca putere cu baza a atunci logaritmăm în baza 10

Ex.: $2 \cdot 5^x + 3 \cdot 5^{x-1} - 4 \cdot 5^{x-2} = 61$

E_1) Ec. devine: $2 \cdot 5^x + 3 \cdot \frac{5^x}{5} - 4 \cdot \frac{5^x}{5^2} = 61$

E_2) not $5^x = t \Rightarrow 2t + \frac{3t}{5} - \frac{4t}{25} = 61 \mid \cdot 25$

$\Rightarrow 50t + 15t - 4t = 61 \cdot 25 \Rightarrow 61t = 61 \cdot 25 \mid : 61$

$\Rightarrow t = 25$

E_3) $5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2$, baza este $5 \neq 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

TEMĂ: a) $4 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x-1} = 22$ b) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = \frac{13}{3}$

c) $3^x + 3^{x+2} = 2^{x+3} + 2^{x+1}$ d) $5^x - 3^{x+1} + 5^{x+2} = 5^{x+1} + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

EC. EXPONENȚIALE DE TIPUL (N1)

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x + \gamma = 0$$

E_1) se notează $a^x = t \Rightarrow a^{2x} = t^2 \Rightarrow$ ec. de gr II în $t \Rightarrow t_{1,2} = \dots$

E_2) $a^x = t_1 \Rightarrow x = \dots$

$a^x = t_2 \Rightarrow x = \dots$

Obs.: Dacă $t_1, t_2 < 0 \Rightarrow \nexists x$ în acel caz

Obs 2.: Dacă t_1, t_2 nu pot fi scrise ca o putere a lui a, atunci logaritmăm în baza 10

Exp.: Rezolvați: $9^x - 3^x - 2 = 0$

E_1) Ec. $3^{2x} - 3^x - 2 = 0$, not $t = 3^x \Rightarrow 3^{2x} = t^2$

E_2) $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$

E_3) $t_1 = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \mid \lg(\cdot\cdot) \Rightarrow x \lg 3 = \lg 2 \Rightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg 3}$

$t_2 = -1 \Rightarrow 3^x = -1 \Rightarrow x \in \emptyset$

$S_f: x = \frac{\lg 2}{\lg 3}$

TEMĂ: a) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ b) $9^x + 3^x - 12 = 0$

c) $4^x + 2^{x+1} = 80$ d) $4^x + 2^x = 20$

EC. LOGARITMICE DE TIPUL (N1)

$$\log_{f(x)} g(x) = h(x)$$

E_1) se pun eventuale condiții (dacă nu punem condiții, soluțiile posibile se verifică în ecuația dată)

E_2) se folosește definiția logaritmului

$$\log_{f(x)} g(x) = h(x) \Rightarrow g(x) = (f(x))^{h(x)}$$

Obs.: valoarea unui logaritm poate fi și negativă

Exp 1: rezolvați $\log_2(x+1) = 3$

E_1) folosind definiția $\Rightarrow x+1 = 2^3 \Rightarrow x+1 = 8$

$\Rightarrow x = 7$ soluție posibilă

E_2) o verificăm $\Rightarrow \log_2 8 = 3$ OK.

$\Rightarrow x = 7$ soluție

Exp 2: rezolvați $\log_3 x^2 = 4$

E_1) $\log_3 x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 3^4 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$ soluții posibile

E_2) le verificăm: $x = 9 \rightarrow \log_3 9^2 = 4$ A $\rightarrow$ OK soluții

$x = -9 \rightarrow \log_3 (-9)^2 = 4$ A

Obs.: era greșit $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$, era corect $\log_3 x^2 = 2\log_3 |x|$

DEFINIȚIA FACTORIALULUI

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ $\forall n$

$0! = 1$ (așa se definește)

Obs.: atunci când apar factoriale, se descompun cel mai mare în funcție de cel mai mic

Ex1: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Ex2: $\frac{5!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$

Ex3: $\frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)} = \frac{1}{n+3}$

Ex4: $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)}{(n-3)!} = (n-2)(n-1)$

MULȚIMI ORDONATE, MULȚIMI NEORDONATE

mț ordonate: contează ordinea elementelor

Exp: câte nr. de 2 cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea {1; 3; 5}

Numerele sunt 13; 17; 31; 37; 71; 73 ⇒
⇒ 6 numere

mț neordonate: nu contează ordinea elementelor,

Exp: câte mulțimi cu 2 elemente distincte se pot forma cu {1; 3; 7}

{1; 3}; {1; 7}; {3; 7} → 3 mulțimi

Obs: la mț neordonate apar acolade și nu contează ordinea elementelor

Obs2: întotdeauna numărul mulțimilor ordonate este mai mare decât al mț. neordonate

PERMUTĂRI

a) P_n este numărul mț ordonate cu n elemente din n posibile

b) $P_n = n!$ formulă

c) Cond: $n \in \mathbb{N}$

Exp: În câte moduri pot pune pe raft 5 cărți distincte?

Punem 5 cărți din 5, contează ordinea

$\Rightarrow P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

(***)

Obs.: PERMUTĂRI CU REPETIȚIE

Dacă a se repetă de n_1 ori, b se repetă de n_2 ori

$\Rightarrow$ alegerea a $n_1 + n_2$ variante de a și de b se poate face

în $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$

Exemplu: câte nr. de 7 cifre se pot forma cu cifrele: 1, 3, 5, 5, 1, 1, 1

$$\frac{7!}{4! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2!} = 105 \text{ numere}$$

ARANJAMENTE

a) A_n^k este numărul <u>șirurilor ordonate</u> cu k elemente din n posibile

b) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

c) <u>Cond</u>: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ n \geq k \end{cases}$

<u>Exp</u>.: În câte moduri pot pune pe raft 3 cărți distincte din 5 posibile?

Aleg 3 din 5, contează ordinea

$$\Rightarrow A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} =$$

$$= \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 60$$

COMBINĂRI

a) C_n^k este numărul submulțimilor neordonate cu k elemente din n posibile

b) $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c) Cond.: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ n \geq k \end{cases}$

Ex: În câte moduri aleg 3 cărți distincte din 5 să a pleca excursie?

Aleg 3 din 5, nu contează ordinea

$$\Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

REGULA SUMEI. REGULA PRODUSULUI (N1)

REGULA SUMEI: Dacă un obiect A se alege în „m" moduri și alt obiect B se alege în „n" moduri, alegerea lui A sau a lui B poate fi făcută în „m+n" moduri

Exp: Câte numere de forma $N=\overline{236a}$ divizibile cu 5 există?

Caz I: $a=0 \Rightarrow \overline{2360} \vdots 5$ și cum sunt 10 variante pentru $b \Rightarrow$ 10 numere

Caz II: $a=5 \Rightarrow \overline{2365} \vdots 5$ și cum sunt 10 variante pentru $b \Rightarrow$ 10 numere

Deoarece a poate fi 0 sau 5 $\Rightarrow$ în total sunt 10+10=20 numere

REGULA PRODUSULUI: Dacă un obiect A se alege în „m" moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un alt obiect B se alege în „n" moduri independente de alegerea lui A, atunci alegerea lui A și B se poate face în „$m \cdot n$" moduri

Exp: Câte numere de forma $N=\overline{236a} \vdots 5$ există

b → 10 v
a → 2 v
independ

Nr. de moduri $\Rightarrow 10 \cdot 2 = 20$ numere

PROBABILITATEA

$$P = \frac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$$

Exp.: Câte numere de 2 cifre : 10 există

$$E_1) P = \frac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$$

E_2) nr. caz posibile: toate numerele de 2 cifre $\Rightarrow \overline{ab}$ unde $a \to$ 9 variante, $b \to$ 10 variante independente

---

regula produsului $\Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ nume

E_3) nr. caz favorabile: toate numerele de 2 cifre divizibile cu 10 $\Rightarrow \overline{ab}$ unde

$a \to$ 9 variante

$b \to$ 1 variantă

independ

---

regula produsului $\Rightarrow$ 9 numere

$$E_1) P = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

BINOMUL LUI NEWTON (N1)

are forma $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

adică $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$

Exp: $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^3 = C_3^0 (\sqrt{x})^3 (\sqrt[3]{y})^0 + C_3^1 (\sqrt{x})^2 (\sqrt[3]{y})^1 + C_3^2 (\sqrt{x})^1 (\sqrt[3]{y})^2 + C_3^3 (\sqrt{x})^0 (\sqrt[3]{y})^3$

Obs: orice binom are „n+1" termeni

Obs 2: termenul binomului este $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$ iar rangul său este „k+1"

Obs 3: coeficienții sunt toate numerele ce apar iar coef. binomului sunt doar C_n^k.

Obs 4: $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (-b)^k$

Exp 1: $(\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{y})^5$, x cere $T_3 = ?$ și coeficientul T_3

$T_3 = C_5^2 (\sqrt{x})^{5-2} (5\sqrt[3]{y})^2 = C_5^2 (\sqrt{x})^3 \cdot 5^2 (\sqrt[3]{y})^2$

$= \dots = 25 \cdot C_5^2$

CONDIȚIA CA UN TERMEN SĂ CONȚINĂ PE x LA O ANUMITĂ PUTERE (sau SĂ NU-L CONȚINĂ PE x)

E_1) se scrie termenul general sub cea mai simplă formă folosind

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

E_2) se pune condiția ca puterea lui x să fie puterea cerută în enunț

E_3) dacă se cere condiția ca un termen să nu-l conțină pe x atunci puterea lui x trebuie să fie egală cu 0

Exemplu: $\left(\sqrt[3]{x} - x\sqrt{x}\right)^{11}$, găsiți termenul ce-l conține pe x^6

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{11}^k \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{11-k} \left(-x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^k =$

$= C_{11}^k x^{\frac{11-k}{3}} \cdot (-1)^k \cdot x^{\frac{3k}{2}} =$

$= (-1)^k C_{11}^k x^{\frac{11-k}{3} + \frac{3k}{2}} =$

$= (-1)^k C_{11}^k x^{\frac{22+7k}{6}}$

E_2) T_{k+1} conține pe $x^6 \Rightarrow$

$\frac{22+7k}{6} = 6 \Rightarrow 22+7k = 36 \Rightarrow$

$7k = 14 \Rightarrow k = 2$

E_3) termenul cerut este

$T_{k+1} = T_{2+1} = (-1)^2 \cdot C_{11}^2 x^{\frac{22+14}{6}} = C_{11}^2 x^6$

Exemplu: $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$, Studiați dacă $\exists$ termen ce nu-l conține pe x

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{21}^k \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{21-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k =$

$= C_{21}^k x^{\frac{21-k}{5} - \frac{k}{2}} = C_{21}^k x^{\frac{42-7k}{10}}$

E_2) T_{k+1} nu conține pe $x \Leftrightarrow$

$42 - 7k = 0 \Leftrightarrow k = 6$

$\Rightarrow \exists$ termen ce nu-l conține pe x și el este T_{k+1} adică T_7

DETERMINAREA NUMĂRULUI DE TERMENI RAȚIONALI (IRAȚIONALI) AI UNEI DEZVOLTĂRI

E_1) se scrie termenul general sub forma cea mai simplă folosind

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

E_2) T_{k+1} rațional $\Leftrightarrow$ toate puterile care apar trebuie să fie întregi, unde $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$

E_3) Rt a găsi câți termeni sunt raționali, sau numărăm valorile lui k obținute mai sus, sau, dacă acest lucru nu e posibil folosim

$$a_n = a_1 + (n-1) r$$

E_4) dacă se cere numărul de termeni iraționali, din numărul total de termeni (care este „n+1") scădem numărul termenilor raționali

Obs.: Atunci când termenul general nu poate fi scris ca o singură putere, trebuie să fim atenți la realizarea intersecției de mulțimi

---

Exp 1.: Găsiți nr. termenilor raționali din $(2+\sqrt[3]{5})^{13}$

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{13}^k 2^{13-k} 5^{\frac{k}{3}}$

E_2) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-k \in \mathbb{Z} \text{ adev} \\ \frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \text{ și cum} \end{cases}$

$k \in \{0; 1; \dots; 13\} \Rightarrow k \in \{0; 3; 6; 9; 12\}$

$\Rightarrow$ 5 termeni raționali

Obs.: deoarece $n = 13$ rezultă sunt $13+1-5 = 9$ termeni iraționali

Exp 2: Găsiți nr. termenilor raționali din $(2+\sqrt[3]{5})^{688}$

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{688}^k 2^{688-k} 5^{\frac{k}{3}}$

E_2) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} 688-k \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$k \in \{0; 3; 6; \dots; 687\}$

E_3) Obs. că valorile lui k sunt în progresie cu $a_1 = 0$, $a_n = 687$, $r = 3$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) r \Rightarrow 687 = 0 + (n-1) \cdot 3$

$\Rightarrow 229 = n-1 \Rightarrow n = 230 \Rightarrow$

sunt 230 termeni raționali

E_4) nr. term. iraționali: $689 - 230 = 459$

Exp 3: Găsiți nr. term. raționi $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}\right)^{213}$

E_1) $T_{k+1} = C_{213}^k \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{213-k} \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^k = C_{213}^k 2^{\frac{213k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{2}}$

E_2) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{213-k}{3} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$ și $k \in \{0; 1; \dots; 213\}$

$\Rightarrow \begin{cases} k \in \{0; 3; 6; \dots; 213\} = M_1 \\ k \in \{0; 2; 4; \dots; 212\} = M_2 \end{cases}$

E_3) $k \in M_1 \cap M_2 = \{0; 6; \dots; 210\} \Rightarrow$

progresie, $a_1 = 0$, $a_n = 210$, $r = 6 \Rightarrow$

$210 = 0 + (n-1) 6 \Rightarrow n = 36$

CALCULAREA SUMELOR ELEMENTARE DE COMBINĂRI

(N1)

a) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$

c) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

d) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots = 0$.

Exemplu: Calculați $S_1 = C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + \dots + C_{15}^{15}$

$S_2 = C_{15}^0 + C_{15}^2 + C_{15}^4 + \dots + C_{15}^{14}$

$S_1 = 2^{15}$ (care nu se calculează)

$S_2 = 2^{15-1} = 2^{14}$ (care nu se calculează)