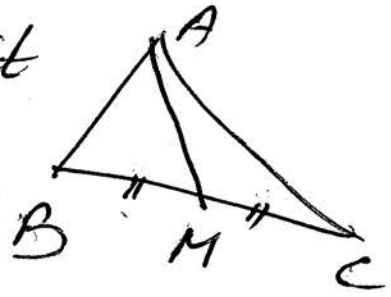
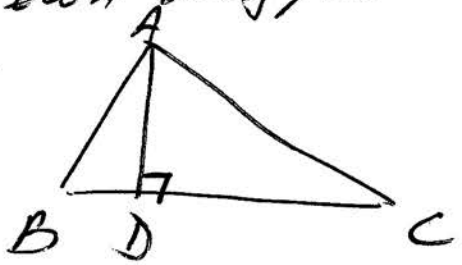
LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

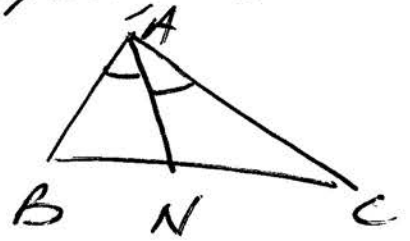
a) <u>mediana</u>: unește vf cu mijlocul laturii opuse. Se intersectează în G numit <u>centru de greutate</u>



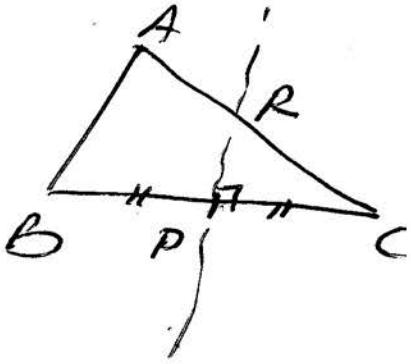
b) <u>înălțimea</u>: perpendiculara din vârf pe latura opusă. Se intersectează în H numit <u>ortocentru</u>



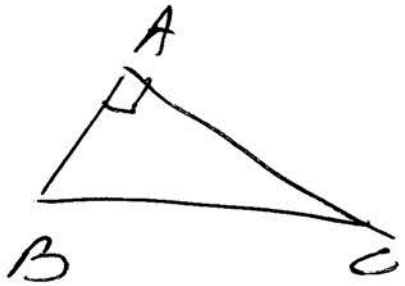
c) <u>bisectoarea</u>: împarte ∢ în 2 părți egale. Se intersectează în I numit <u>centrul arcului înscris</u>



d) <u>mediatoarea</u>: perpendiculara pe mijl laturii, poate să nu treacă prin vârf. Se intersectează în O numit <u>centrul cercului circumscris</u>



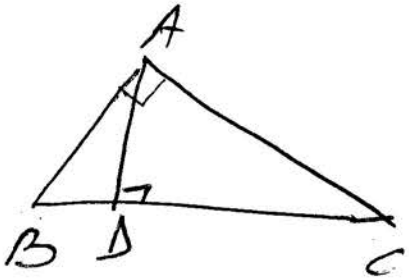
PROPRIETĂȚI ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



a) T. Pitagora

Dacă $m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

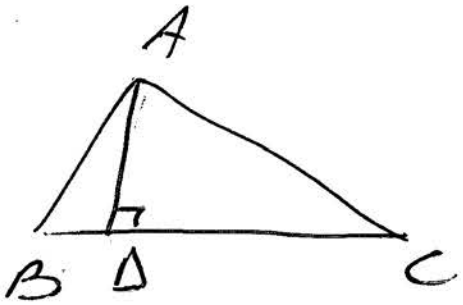


b) T. catetei

Dacă $m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = B\Delta \cdot BC$

sau $AC^2 = C\Delta \cdot BC$



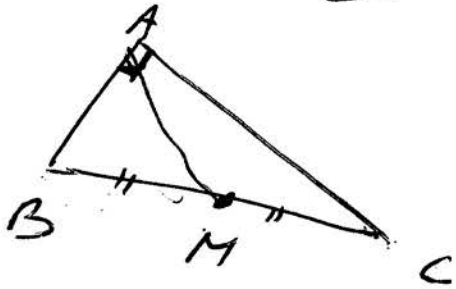
c) T. înălțimii:

Dacă $m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow$

$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta C$

d) proprietatea medianei:

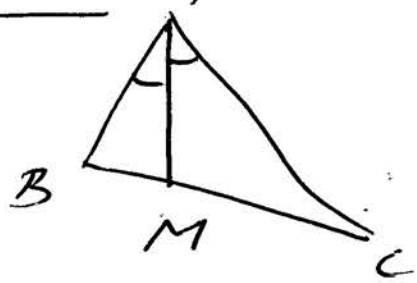
- dacă $m(A) = 90^\circ$, AM mediană $\Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$



- dacă AM mediană și $AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) = 90^\circ$

(*)

TEOREMA BISECTOAREI



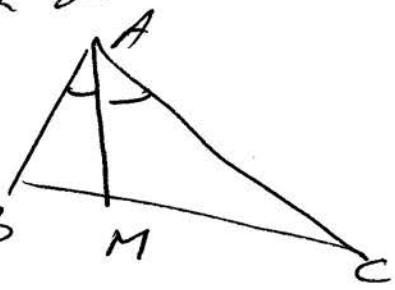
Fie $\triangle ABC$ și AM bisectoare $\measuredangle A$

Atunci: $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$

Obs: Este valabilă și reciproca: dacă $M \in (BC)$ cu $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow$ AM bisectoare

---

Exp.: Dacă $AB = 8$, $AC = 6$ și $BM = 3$, calculați BC știind că AM este bisectoarea din A



E_1) AM bisectoare $\xrightarrow{T. \text{ bisect}} \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$

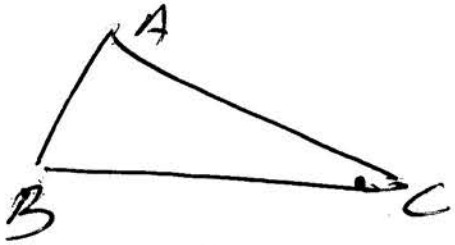
E_2) $\frac{8}{6} = \frac{3}{MC} \Rightarrow 8MC = 18 \Rightarrow MC = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

E_3) $BC = BM + MC = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$

SUMA A DOI VECTORI

a) regula Δ: unde se termină primul vector, începe cel de-al doilea

Exp:



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ și

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

b) <u>regula paralelogramului</u>: ambii vectori pornesc din același vârf



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ și

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}$

<u>Obs!</u>: regula Δ se poate folosi și fără a face figura:

Exp: $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{AE}$

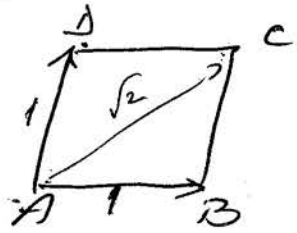
$\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$

MODULUL UNEI SUME DE VECTORI

E_1) se exprimă suma de vectori în funcție de același vector

E_2) se folosește $|\alpha \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$

Exp 1: Fie $ABCD$ pătrat de latură 1, calculați lungimea vectorului $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$



$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC}$ (regula paralelogr.)

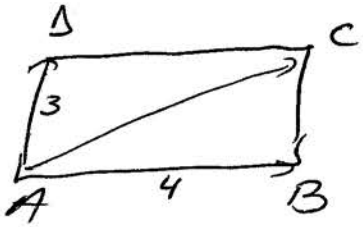
$|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = |2\vec{AC}| = |2| \cdot |\vec{AC}| = 2|\vec{AC}|$

Dar, în $\triangle ABC \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

$\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2\sqrt{2}$

Exp 2: Fie $ABCD$ dreptunghi cu $AB = 4$, $AD = 3$. Calculați

$|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$



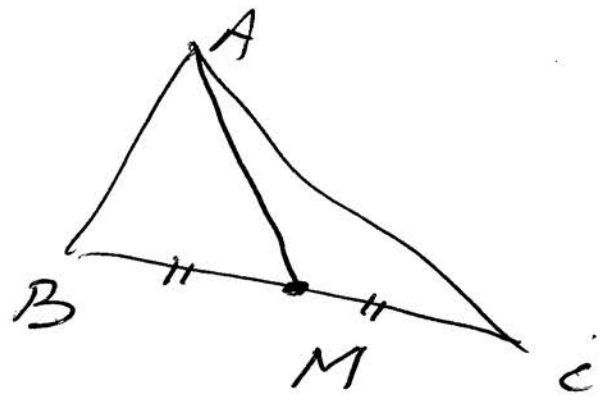
$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC}$ (regula paralel.)

$\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = |2\vec{AC}| = 2|\vec{AC}|$

În $\triangle ABC \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow AC = 5 \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2 \cdot 5 = 10$

CONDIȚIA VECTORIALĂ CA AM mediană



AM mediană în $\triangle ABC$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

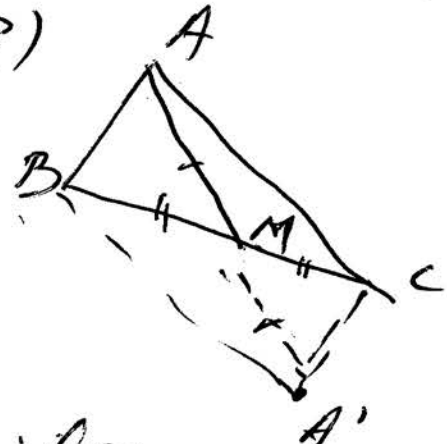
dem:

$\boxed{\Rightarrow}$ AM mediană, să arăt $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

E1) AM mediană, M mijloc $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$

E2) adunăm $\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) + (\underbrace{\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}}_{\vec{0}})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$



met II:

E1) Construim ABA'C paralelogram

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

E2) ABA'C par $\Rightarrow$ diag se mijl

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dacă $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \Rightarrow$ AM mediană

E1) Din paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

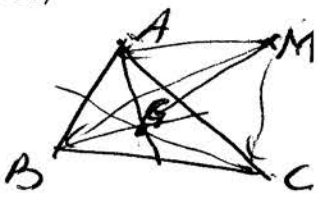
M mijl BC (mijl $AA' \Rightarrow$ e mijl BC)

CONDIȚII ECHIVALENTE CA G (N1)
CENTRU DE GREUTATE

G centru de greutate pentru $\Delta ABC \Leftrightarrow \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

G centru de greutate $\not\Delta ABC \Leftrightarrow \forall M \in$ Plan avem

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MG}$$



Exp 1: Fie G centru de greutate pentru ΔABC. Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $2a\vec{GA} - 3b\vec{GB} = \vec{GC}$

Din G centru de greutate $\not\Delta ABC \Rightarrow \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB}$$

Folosind ipoteza $\vec{GC} = 2a\vec{GA} - 3b\vec{GB}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\vec{GA} - \vec{GB} = 2a\vec{GA} - 3b\vec{GB} \Big\} \Rightarrow$$

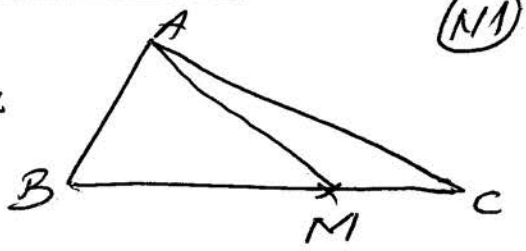
Dar, $(\vec{GA}, \vec{GB})$ necoliniari

$$-1 = 2a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$-1 = -3b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$$

ÎMPĂRȚIREA ÎN RAPORT k

(N1)



Dacă $\frac{BM}{MC} = k \Rightarrow \forall A$ exterior

avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$

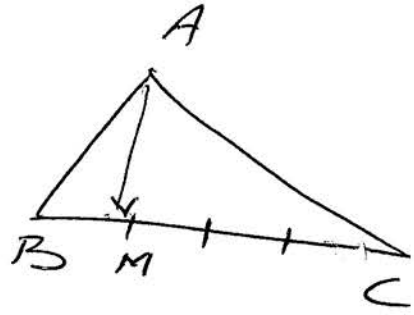
Dacă $\frac{CM}{MB} = k \Rightarrow \forall A$ exterior avem

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}$$

Obs.: Dacă la raportul k împărțirea se începe cu $B \Rightarrow$ primul vector „merge" tot către B, dacă se începe cu $C \Rightarrow$ primul vector merge către C.

Exp.: Fie ΔABC și $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$. Arătați că

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$



E_1) Situarea lui M:

Din $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BM}$

$\Rightarrow MC$ și BM au ac. sens și

$MC = 3BM \Rightarrow \frac{MC}{BM} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{matrix} MC = 3x \\ BM = x \end{matrix} \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$

E_2) Din $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{\frac{4}{3}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

SITUAREA PUNCTELOR DATE PRIN RELAȚII VECTORIALE

E_1) Se cere situarea lui M dacă $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MB}$ sau $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BM}$ sau $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MB}$ ⇒ punctele A, B și M coliniare

E_2) din A, B, M coliniare putem avea șase ordonări: M-A-B; A-M-B; A-B-M

E_3) folosind sensul și lungimea vectorilor se situează M ținând cont că dacă $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{n}\overrightarrow{BC}$ înseamnă că $\overrightarrow{AM}$ are m bucăți din cele n pe care le are $\overrightarrow{BC}$ și se împart segm. în bucăți

---

Ex1: Situați punctul M în situațiile:

a) $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$; b) $\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$;

c) $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

---

a) $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ ⇒ A, M și B coliniare

• Dacă ordinea este M-A-B ⇒ nu poate $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ (pt că au sens diferit)

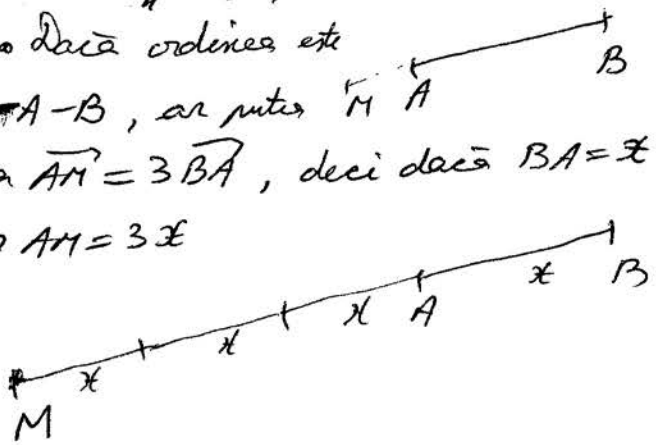


• Dacă ordinea este A-M-B ⇒ se poate ca $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ ⇒ MB are o bucată, MB=x iar $\overrightarrow{AM}$ are 3 bucăți, AM=3x ⇒ împărțim pe AB în 4 bucăți, AM=4x și AM are 3x



b) $\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$, nu lucrăm cu semnul „-" ⇒ $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BA}$

• Dacă ordinea este M-A-B, ar putea ca $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BA}$, deci dacă BA=x ⇒ AM=3x

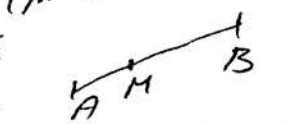


c) $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ⇒ AM are 3 bucăți din cele 5 pe care le are $\overrightarrow{AB}$

• Dacă ordinea este M-A-B nu se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ (pt că au sens diferit)



• Dacă ordinea este A-M-B, ar putea ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ⇒ $\overrightarrow{AM}$ are 3 bucăți din cele 5 ale lui $\overrightarrow{AB}$ ⇒ împărțim AB în 5 ⇒ AB=5x și luăm AM=3x

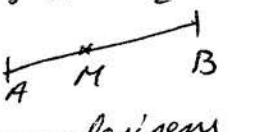


d) $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$, nu lucrăm cu semnul „-" ⇒ $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ ⇒ punctele A, B și M coliniare

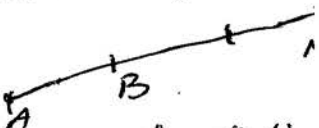
• Dacă ordinea este M-A-B nu se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ pentru că, deși $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BM}$ au același sens, e clar că AM < BM deci nu poate fi $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$



• Dacă ordinea este A-B-M, nu se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ pt că nu au același sens



• Dacă ordinea este A-B-M, se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ ⇒ AM are 3 bucăți din cele 2 ale lui BM ⇒ BM=2x, AM=3x și va trebui ca AB=x iar BM=2x



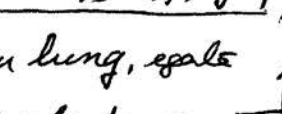
VECTORI CU COORDONATE

(N1)

1) coord vectorilor: dacă se știe $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ $\Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}}$ unde

$\vec{i}, \vec{j}$ versori (au lung. egale cu 1 și sunt ⊥ ale două câte două)



Obs: dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} \Rightarrow$ $\vec{u}$ are coordonatele (x_u, y_u)

2) egalitatea a doi vectori: dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}$ și $\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}$ atunci

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_u = x_v \text{ și} \\ y_u = y_v \end{cases}$

3) modulul (lungimea) unui vector

dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} \Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}}$

4) operații cu vectori dați prin coord

$\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v)\vec{i} + (y_u + y_v)\vec{j}$

$\vec{u} - \vec{v} = (x_u - x_v)\vec{i} + (y_u - y_v)\vec{j}$

$\alpha\vec{u} = (\alpha x_u)\vec{i} + (\alpha y_u)\vec{j}$

5) condiția ca 2 vectori coliniari (paraleli)

$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}}$

6) cond. ca 2 vectori perpendiculari

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_u x_v + y_u y_v = 0$

7) produsul scalar

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v}$

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

8) cosinusul unghiului a 2 vectori

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x_u x_v + y_u y_v}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Obs: dacă $\cos(\vec{u}, \vec{v}) > 0 \Rightarrow$ unghi ascuțit

dacă $\cos(\vec{u}, \vec{v}) < 0 \Rightarrow$ unghi obtuz

Exp 1: $A(1;3)$, $B(2;5) \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} = (2-1)\vec{i} + (5-3)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j}$

Exp 2: $m, n = ?$ dacă $\vec{u} = \vec{v}$ pt $\vec{u} = 3\vec{i} + (m+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = (n-1)\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = n-1 \\ m+1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n = 4 \\ m = 5 \end{matrix}$

Exp 3: $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{j} \Rightarrow$

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ și

$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

Exp 4: $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$, se cere $\vec{u} - 3\vec{v} = ?$

$\vec{u} - 3\vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(8\vec{i} - 2\vec{j}) =$

$= (3 - 24)\vec{i} + (4 + 6)\vec{j} = -21\vec{i} + 10\vec{j}$

Exp 5: $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = a\vec{i} + 6\vec{j}$, se cere $a = ?$ dacă a) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari b) $\vec{u} \perp \vec{v}$

a) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{4}{6} \Rightarrow a = 3$

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 2 \cdot a + 4 \cdot 6 = 0 \Rightarrow a = -12$

Exp 6: $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = 8 - 15 = -7$

Exp 7: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$, $m(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

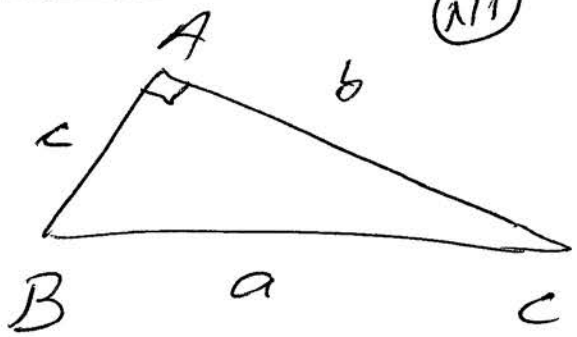
Exp 8: se cere $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ dacă $\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2 \cdot 3 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ unghiul e ascuțit

TRIGONOMETRIE ÎN TRIUNGHICUL DREPTUNGHIC

(XI1)

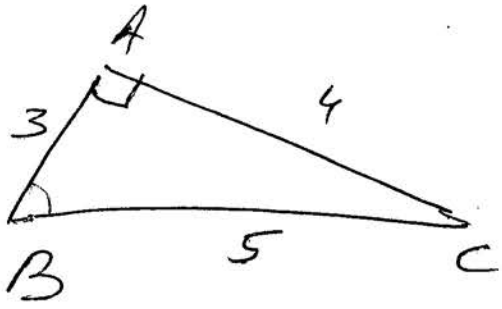


$$\sin \measuredangle = \frac{\text{cat. op}}{\text{ip}}$$

$$\cos \measuredangle = \frac{\text{cat alăt}}{\text{ip}}$$

$$\operatorname{tg} \measuredangle = \frac{\text{cat op}}{\text{cat alăt}}; \quad \operatorname{ctg} \measuredangle = \frac{\text{cat. alăt}}{\text{cat. op}}$$

Exp: ΔABC cu $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$



Se cere: a) ΔABC dreptunghic

b) $\sin B$

c) $\cos B$

d) $\operatorname{tg} B$

e) $\operatorname{ctg} B$

---

a) dacă ΔABC verifică $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic

$BC^2 = 25$; $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ egalitate

b) $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$

c) $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$

d) $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$

e) $\operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$

TRANSFORMAREA DIN GRADE ÎN RADIANI ȘI DIN RADIANI ÎN GRADE

a) transformare din grade în radiani

$15^\circ = \dots$ în funcție de π

TEORIE: 180° ------ π .. (regula de 3 simplă)

15° ------ x

$$\Rightarrow x = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}$$

b) transformare din radiani în grade

- se înlocuiește π cu 180°

Exp: $\frac{7\pi}{3} = \frac{7 \cdot 180^{60^\circ}}{3} = 420^\circ$

Exp: $25^\circ \dots$ în funcție de π

180° ------ π

25° ------ x

$$\Rightarrow x = \frac{25^{5^\circ} \cdot \pi}{180^{36^\circ}} = \frac{5\pi}{36}$$

Exp 2: $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$

TABELUL TRIGONOMETRIC (N1)

E_1) se calculează sin, cos, tg, ctg pentru unghiuri de $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$

E_2) pe linia de construcție se pun în ordine cifrele $0; 1; 2; 3; 4$ apoi se extrage rădăcina din fiecare $\sqrt{0}; \sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}$ iar toate rezultatele se împart la 2 $\Rightarrow \frac{\sqrt{0}}{2}; \frac{\sqrt{1}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{4}}{2}$, adică

$$0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1$$

E_3) rezultatele finale se trec pe linia lui „sin", la „cos" se trec aceleași rezultate în ordine inversă, la „tg" folosim $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ iar la „ctg" se trec invers decât la „tg"

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin					
cos					
tg					
ctg					
linie de constr	0	1	2	3	4

$\Rightarrow$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin					
cos					
tg					
ctg					
linie de constr	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

$\Rightarrow$

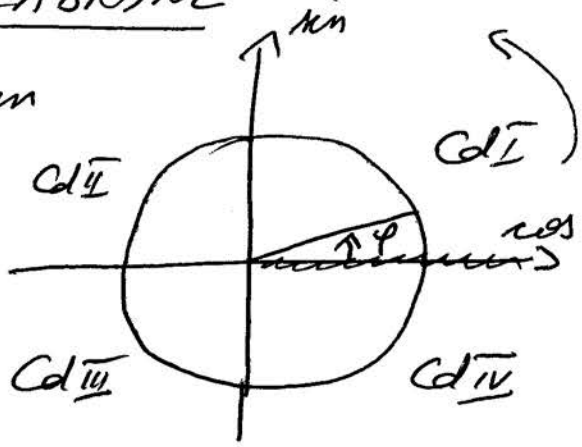
sin					
cos					
tg					
ctg					
linie de	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

$\Rightarrow$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\
ctg	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
linie de	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

SEMNELE LUI „sin" ȘI „cos" (N1)

ÎN CELE 4 CADRANE



E_1) cercul trigonometric este un cerc cu centrul în origine și raza $R=1$

E_2) orice unghi se măsoară pornind de la semiaxa pozitivă Ox în sens trigonometric (invers acelor de la ceas)

E_3) în loc de axa Ox avem axa cosinusurilor, în loc de axa Oy avem axa sinusurilor, deci în loc să avem $M(x,y)$ vom avea $M(\cos\varphi, \sin\varphi)$

E_4) ținând cont de semnele coordonatelor x și y în funcție de cele 4 cadrane, vom avea

$M \in Cd\,I \Leftrightarrow \begin{cases} \cos > 0 \\ \sin > 0 \end{cases}$	$M \in Cd\,II \Leftrightarrow \begin{cases} \cos < 0 \\ \sin > 0 \end{cases}$
$M \in Cd\,III \Leftrightarrow \begin{cases} \cos < 0 \\ \sin < 0 \end{cases}$	$M \in Cd\,IV \Leftrightarrow \begin{cases} \cos > 0 \\ \sin < 0 \end{cases}$

Ex.: Dacă $M \in Cd\,III$ și $|\cos x| = \frac{1}{3}$, se cere $\cos x$

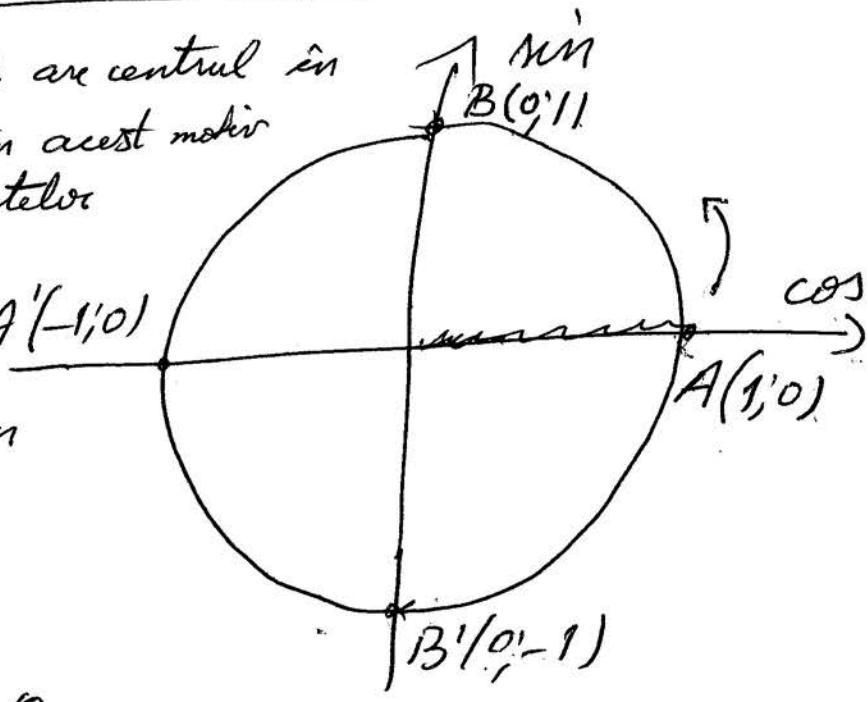
E_1) $M \in Cd\,III \Rightarrow \cos x < 0$

E_2) $|\cos x| = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$

Valorile ale „cos" și „sin" în punctele de intersecție ale cercului cu axele

E_1) cercul trigonometric are centrul în origine și raza $R=1$, din acest motiv găsim coordonatele punctelor A, B, A' și B'



E_2) din cerc deducem

$$\begin{cases} \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 0^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 90^\circ = 0 \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 180^\circ = -1 \\ \sin 180^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 270^\circ = 0 \\ \sin 270^\circ = -1 \end{cases}$$

E_3) în cer exprimările în sist. de π

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = 90^\circ;\ \pi = 180^\circ;\ \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$ și analogele

FORMULA FUNDAMENTALĂ A TRIGONOMETRIEI

(N1)

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1,} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- se folosește atunci când știm valoarea unei funcții trigonometrice și ne trebuie valoarea celeilalte, iar semnul se alege în funcție de cadrane

Exp: calculați $\cos x$ dacă $x \in Cd\ II$ și $\sin x = \frac{1}{5}$

$E_1)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{24}{25}}$

$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$E_2)$ $x \in Cd\ II \Rightarrow \cos x < 0$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$



PARITATE / IMPARITATE

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

$\Rightarrow$ singura funcție **pară** este $\cos x$ " iar toate celelalte sunt " impare

---

Exemplu: $\cos(-17^\circ) = a$, se cere $\cos 17^\circ = ?$

$\cos(-17^\circ) = \cos 17^\circ \Rightarrow a = \cos 17^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 17^\circ = a$

Exemplu 2: $\sin(-17^\circ) = a$, se cere $\sin 17^\circ = ?$

$\sin(-17^\circ) = -\sin 17^\circ \Rightarrow a = -\sin 17^\circ$

$\Rightarrow \sin 17^\circ = -a$

PERIODICITATEA FUNCȚIILOR TRIG. (N1)

a) $\cos(x+2k\pi)=\cos x, \forall k\in\mathbb{Z}$ c) $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

b) $\sin(x+2k\pi)=\sin x, \forall k\in\mathbb{Z}$ d) $\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

Obs.: în limbaj elementar, putem spune că „sin" și „cos" lasă afară număr par de π iar „tg" și „ctg" la afară atât număr par cât și impar de π

Obs 2.: dacă vrem să folosim periodicitatea pentru fracții, scoatem întâi întregii din fracții, folosind că $\frac{A}{B}=C+\frac{R}{B}$ unde C = câtul lui A:B iar R restul, apoi folosim periodicitatea

Ex 1: dacă $\sin x=\frac{1}{7}$, se cere $\sin(x+6\pi)$

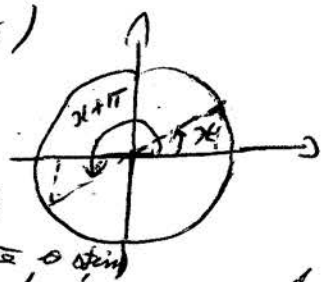
E1) $\sin(x+6\pi)=\sin x=\frac{1}{7}$

Ex 2: dacă $\cos x=-\frac{1}{3}$, se cere $\cos(x+11\pi)$

E1) $\cos(x+11\pi)=\cos(x+\pi+10\pi)=$ cos periodă $\cos(x+\pi)$

E2) Dem cere $\Rightarrow \cos(x+\pi)=-\cos x$

(sau cu formulă dacă o știm)



E3) Dar, $\cos x=-\frac{1}{3}\Rightarrow -\cos x=\frac{1}{3}$

Ex 3: $\operatorname{tg}x=9$, se cere $\operatorname{tg}(x+7\pi)$

E1) din $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(x+7\pi)=\operatorname{tg}x=9$

Ex 4: $\operatorname{ctg}x=-2$, se cere $\operatorname{ctg}(x-8\pi)$

E1) din $\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x=-2$

Ex 4: calculați $\sin\frac{244\pi}{3}$

E1) $244 \mid 3$, $24=4$, $3=1$, 81 $\Rightarrow \frac{244}{3}=81+\frac{1}{3}$

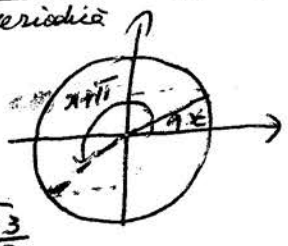
$\Rightarrow \frac{244\pi}{3}=81\pi+\frac{\pi}{3}$

E2) $\sin\frac{244\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+81\pi\right)=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi+80\pi\right)$ periodă $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)$

E3) Dar, $\sin(x+\pi)=-\sin x\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(sau cu formulă)



Ex 5: calculați $\operatorname{tg}\frac{439\pi}{6}$

E1) $439 \mid 6$, $42=73$, $19=1$, 18 $\Rightarrow \frac{439}{6}=73+\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{439\pi}{6}=73\pi+\frac{\pi}{6}$

E2) $\operatorname{tg}\frac{439\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+73\pi\right)$ = t periodă

$=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

FORMULE TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE (N1)

a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

„cos" păstrează același tip de funcție și schimbă semnul

b) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

„sin" schimbă funcția, păstrează semnul

c) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

$\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

d) $\operatorname{ctg}(a+b) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(a+b)}$ și folosim formulele

Ex 1: $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) =$

$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ex 2: $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ =$

$= \sin(73^\circ + 17^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

FORMULE PENTRU DUBLUL UNUI UNGHI (N1)

a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ sau

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ sau

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

c) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

Dem:

a) $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x =$

$= 2 \sin x \cos x$

b) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

Obs: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\Big\}$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Dar, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

și analog, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Exp: $\sin x = \dfrac{3}{5}$, x cere $\cos 2x = ?$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{25}{1 - 2 \cdot \dfrac{9}{25}} = \dfrac{7}{25}$

FORMULE PENTRU JUMĂTĂȚEA UNUI UNGHI (11)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

---

se deduc din: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x = 1+\cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Din $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow$

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Exp: $\sin \frac{\pi}{8} = ?$

$$E_1)\ \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

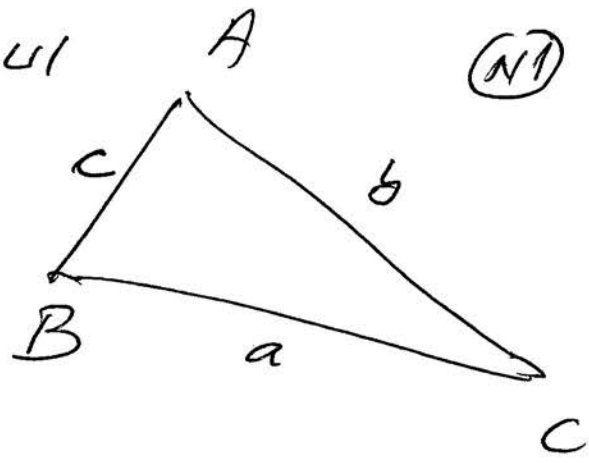
$$E_2)\ \sin \frac{\pi}{8} = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$E_3)\ \frac{\pi}{8} = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ \in Cd\ I \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} > 0$$

$$E_4)\ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

TEOREMA COSINUSULUI

(N1)



În $\triangle ABC$ notăm $BC=a$, $AB=c$ și $AC=b$. Avem:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

sau

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

sau

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Exp: $a=?$ dacă $b=3$, $c=5$ și $m(\hat{A})=60^\circ$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^2=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cos 60^\circ$$

$$a^2=34-30\cdot\frac{1}{2}$$

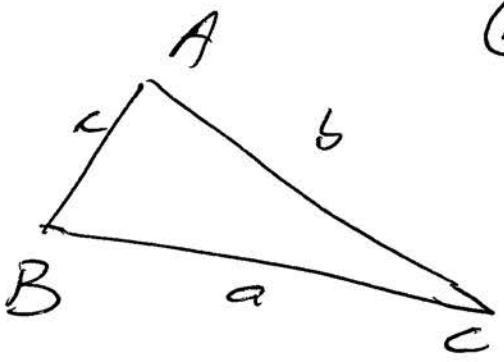
$$a^2=34-15 \Rightarrow a^2=19$$

$$a=\pm\sqrt{19}\Bigg\} \Rightarrow a=\sqrt{19}$$

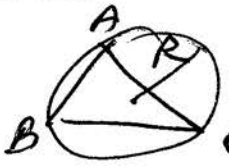
Deci, a lungime

(N1)

T. sinusurilor:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

unde R raza cercului circumscris (trece prin vârfuri 

)

Exp: $A = 45°$, $B = 30°$, $a = 8$ și se cere $b = ?$

E1) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

E2) $\frac{8}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 30°} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

E3) $\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b$

$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot b = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Exp 2: $A = 30°$, $a = 8$ se cere $R = ?$

$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 30°} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\frac{1}{2}} = 2R$

$\Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \cdot 2R \Rightarrow R = 8$

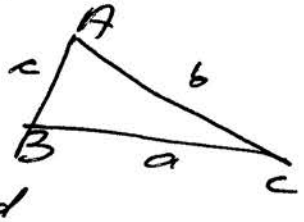
ARIA TRIUNGHIULUI

- din gimnaziu, $A_{\Delta ABC} = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțime}}{2} = \frac{l_1 \cdot l_2 \sin(\hat{l_1 l_2})}{2} =$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ cu $p = \frac{a+b+c}{2}$

- la nivel de liceu, apar în plus formulele

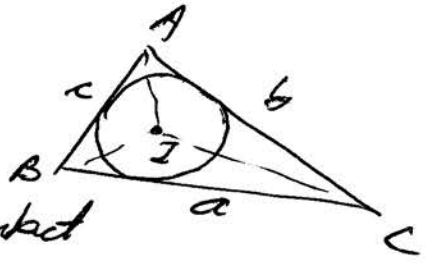
$A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = r \cdot p$ unde $R \to$ raza cerc circumscris, $r \to$ raza cerc înscris



dem.: din $A_{ABC} = \frac{l_1 \cdot l_2 \sin(\hat{l_1 l_2})}{2} = \frac{b \cdot c \sin A}{2}$

din T. sin $\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$ și înlocuind

$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}$



din $A_{ABC} = A_{ABI} + A_{BCI} + A_{ACI}$,

cum rază ⊥ tangentă în punctul de contact

$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{r \cdot c}{2} + \frac{r \cdot a}{2} + \frac{r \cdot b}{2} = r \cdot \frac{c+a+b}{2} = r \cdot p$

Obs 1: În loc de arie folosim denumirea de suprafață

$\Rightarrow S = \frac{a \cdot h_a}{2}$; $S = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Obs 2: am dedus mai sus că $S = \frac{abc}{4S}$ și că $S = r \cdot p$

Obs 3: $A_{\Delta \text{dreptunghic}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$

Obs 4: $A_{\Delta \text{echilateral}} = \frac{l_1 \cdot l_2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

Exp: găsiți aria ΔABC în situațiile: $a=3, b=6, c=7$ respectiv dacă $a=4, b=8$ și $m(\hat{C}) = 30^\circ$

E1) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+6+7}{2} = 8$, $S = \sqrt{8(8-3)(8-6)(8-7)}$

$\Rightarrow S = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 4\sqrt{5}$

$r = \frac{a \cdot b \sin C}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{16 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 8$

DEDUCEREA RAZEI CERCULUI ÎNSCRIS (N1)
(notată r) ȘI A CERCULUI CIRCUMSCRIS (R)

E_1) S-a demonstrat că

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

E_2) S-a demonstrat că

$$S = r \cdot p \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

Ex1: Găsiți raza cercului circumscris în $\triangle ABC$ dacă

$a=6,\ b=8,\ c=10$

E_1) $R = \frac{abc}{4S}$

E_2) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 12$

E_3) $S = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{12 \cdot 12 \cdot 4} =$

$= 12 \cdot 2 = 24$

E_4) $R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10^5}{4 \cdot 24} = 5$

Obs.: Puteam observa (dacă eram deștepți) că

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic $\Rightarrow S = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$

Obs2: Dacă eram și mai deștepți, știam că în $\triangle$ dreptunghic $R = \frac{\text{ipotenuza}}{2} = \frac{10}{2} = 5$

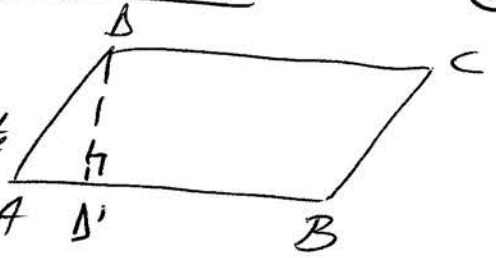
Ex2: Găsiți r dacă $a=3,\ b=6,\ c=7$

E_1) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = 8$, $S = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 4\sqrt{5}$

E_2) $r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ARIA PARALELOGRAMULUI

(N1)



E_1) $ABCD$ paralelogram, îl putem împărți în 2 Δ congruente ΔABC și ΔDAC

E_2) $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = 2 \cdot \frac{AB \cdot DD'}{2} = AB \cdot DD' =$ baza · înălțimea

$\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ABC} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = AB \cdot BC \cdot \sin B$

E_3) $\mathcal{A}_{ABCD} =$ baza · înălțimea

$\mathcal{A}_{ABCD} = l_1 \cdot l_2 \sin(\widehat{l_1, l_2})$

Exp. 1 Dacă $AB = 8$, $BC = 3$ și $m(B) = 30°$, se cere $\mathcal{A}_{ABCD}$ unde $ABCD$ paralelogram

---

E_1) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B} = 8 \cdot 3 \cdot \sin 30°$

E_2) $\mathcal{A}_{ABCD} = \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 12$