MULȚIMI DE NUMERE. FRACȚII ZECIMALE ȘI ORDINARE

1) naturale: $\boxed{\mathbb{N}=\{0;1;2;\dots\}}$

2) întregi: $\boxed{\mathbb{Z}=\{\dots;-2;-1;0;1;2\dots\}}$

3) raționale: $\boxed{\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\}}$

și $\mathbb{Q}$ se mai poate scrie sub forma

$\boxed{\mathbb{Q}=\{\text{fr zecimale cu nr. finit zecimale}\}\cup\{\text{fr. zecimale periodice}\}}$

4) iraționale: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și avem

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{$fr. zecimale neperiodice cu nr. infinit de zecimale$\}$

Obs.: toți radicalii care nu se extrag exact sunt nr. iraționale

Obs2: $\pi=3,14\dots\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$e=2,72\dots\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (nr. lui Euler)

5) reale: $\mathbb{R}$ și $\boxed{\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}$

Obs1: ∀ mț de mai sus „delată" înseamnă că nu conține pe 0

Obs2: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ și $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}$

6) transf din fracții ordinare (cele cu linie de fracție) în fracții zecimale (cele cu virgulă) se face prin împărțirea numărătorului la numitor

7) transf. din fracții zecimale (cele cu virgulă) în fracții ordinare (cele cu linie de fracție)

a) neperiodice: se scrie la numărător numărul fără virgulă, iar la numitor 1 urmat de atâtea zerouri câte cifre are nr. inițial după virgulă

b) periodice: se scrie la numărător numărul fără virgulă din care se scade partea până la perioadă, iar la numitor se scriu atâtea de 9 câte cifre are perioada urmați de atâtea de 0 câte cifre sunt între virgulă și perioadă

Exp: Găsiți numerele naturale, întregi, raționale, iraționale din

$A=\{2;\frac{3}{5};-5;4,6;\sqrt{5};-\sqrt{9};2,3456\dots;\pi;4,851515\dots;2,(5);e\}$

naturale: 2

întregi: $2;-5;-\sqrt{9}$ pt că $-\sqrt{9}=-3$

raționale: $2;\frac{3}{5};-5;4,6;-\sqrt{9};4,85151\dots=4,8(51);2,(5)$

iraționale: $\sqrt{5};2,3456\dots;\pi;e$

Exp.: Arătați că $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$

(R.A.) Pp. $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{5}=\frac{m}{n}$ ired $\Rightarrow 5n^2=m^2$

$\Rightarrow 5\mid m^2\Rightarrow 5\mid m\Rightarrow m=5m_1\Rightarrow 5n^2=25m_1^2$

$\Rightarrow n^2=5m_1^2\Rightarrow 5\mid n^2\Rightarrow 5\mid n\Rightarrow n=5n_1$

$\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{5m_1}{5n_1}$ ... ired ↯

Exp.: transformați: a) $\frac{2157}{5}$ b) $\frac{5}{3}$; c) $\frac{5}{6}$; d) 431,41 e) 1,(6) f) 1,8(21)

a) $2157 \mid 5$ — 20 — $=15$ — 15 — $=7$ — 5 — 20 — $=2$

$\frac{2157}{5}=431,4$

b) $\frac{5}{3}\mid 3$ — 20 — 18 — $=20$

$\frac{5}{3}=1,(6)$

c) $\frac{5}{0}\mid 6$ — 50 — 48 — $=20$ — 20 — $=2$

$\frac{5}{6}=0,8(33)$

d) $431,41=\frac{43141}{100}$

e) $1,(6)=\frac{16-1}{9}=\frac{15}{9}^{(3}=\frac{5}{3}$

f) $1,8(21)=\frac{1821-18}{990}=\frac{1803}{990}^{(3}=\frac{601}{330}$

OPERAȚII CU INTERVALE

(N1)

1) $[a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

$(a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

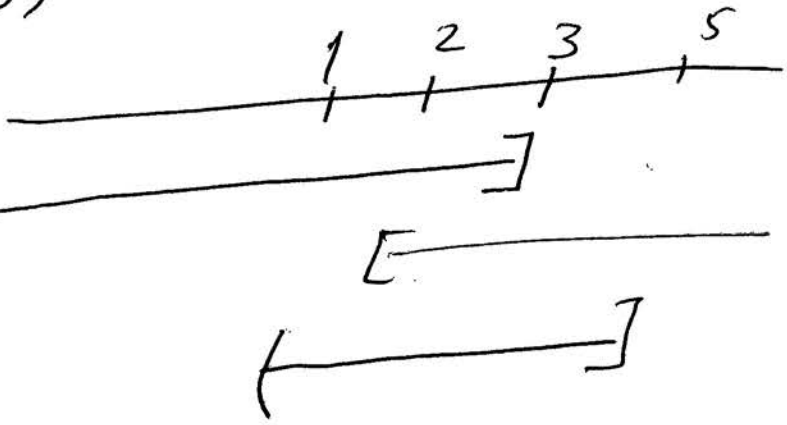
$(a;b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

2) $I_1 \cup I_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ sau } x \in I_2 \}$

$I_1 \cap I_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ și } x \in I_2 \}$

$I_1 \setminus I_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ și } x \notin I_2 \}$.

Ex: $I_1 = (-\infty; 3]$, $I_2 = [2; \infty)$, $I_3 = (1; 5]$



a) $I_1 \cup I_2 =$

$= (-\infty; \infty) = \mathbb{R}$

b) $I_1 \cap I_2 =$

$= [2; 3]$

c) $I_1 \setminus I_2 = (-\infty; 2)$

d) $I_1 \setminus I_3 = (-\infty; 1]$

Obs: Atunci când avem condiții, se intersectează intervalele iar dacă avem cazuri, se

SCHEMA LUI HORNER PENTRU ECUAȚII DE GRAD SUPERIOR

E_1) se calculează divizorii termenului liber, $D_{\text{termen liber}} = \{ \dots \}$

E_2) se face schema lui Horner pt fiecare divizor până obținem ultimul rezultat (numit rest) egal cu 0, liniile unde restul e diferit de 0 se taie

E_3) pt acel divizor cu restul este 0, ec. devine $(x - \text{divizor})(\text{ec. cu coef. în diag.}) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = d \\ \text{sau} \\ \text{ec. cu coef în diagonală} = 0 \end{cases}$

E_4) dacă pentru niciunul dintre acești divizori nu obținem restul 0, atunci calculăm

$\frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coef lui } x \text{ la grad maxim}}}$ și facem schema lui Horner pentru acești divizori

Obs 1: dacă pt divizori întregi nu obținem restul 0 $\Rightarrow$ ec nu are rădăcini întregi, dar poate avea alte rădăcini

Obs 2: dacă pt divizori $\frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coef lui x putere max}}}$ nu obținem restul 0 $\Rightarrow$ ec nu are rădăcini raționale dar poate avea alte rădăcini

Obs 3: schema lui Horner pentru ec. gr III

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

E_1)	x^3	x^2	x	x^0
	a	b	c	d
α	a	$\alpha a + b = b_1$	$\alpha b_1 + c = c_1$	$\alpha c_1 + d = d_1$

E_2) dacă $d_1 \neq 0 \Rightarrow$ încercăm cu alt divizor, dacă $d_1 = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(ax^2 + b_1 x + c_1) = 0$, deci pe prima linie apar puterile lui x în ordine descrescătoare, pe cea de-a doua primul coef se copiază, apoi se înmulțește cu α și se adună în diag., etc

Obs 3: dacă ec nu are termen liber, dăm factor comun pe x la cea mai mică putere la care apare

---

Exp 1: $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$

E_1) $D_{-48} = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots \}_0$

E_2)	x^3	x^2	x	x^0
	1	−12	44	−48
1	1	$1 \cdot 1 - 12 = -11$	$1 \cdot (-11) + 44 = 33$	$1 \cdot 33 - 48 = -15 \neq 0$
−1	1	$1 \cdot (-1) - 12 = -13$	$-1 \cdot (-13) + 44 = 57$	$+57 - 48 \neq 0$
2	1	$2 \cdot 1 - 12 = -10$	$2 \cdot (-10) + 44 = 24$	$2 \cdot 24 - 48 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(1 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 24) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{sau} \\ x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \end{cases} \end{cases}$

S_f: $x \in \{2; 4; 6\}$

Exp 2: $24x^3 + 10x^2 - 13x - 6 = 0$

E_1) $D_{-6} = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 \}$ și nu iese Horner pt niciunul

E_2) $\frac{D_{-6}}{D_{24}} = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \dots \}$

E_3)	x^3	x^2	x	x^0
	24	10	−13	−6
$\frac{1}{2}$	24	$12 + 10 = 22$	$11 - 13 = -2$	$-1 - 6 = -7 \neq 0$
$-\frac{1}{2}$	24	$-12 + 10 = -2$	$1 - 13 = -12$	$6 - 6 = 0$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})(24x^2 - 2x - 12) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \text{sau} \\ 24x^2 - 2x - 12 = 0 \mid :2 \Rightarrow 12x^2 - x - 6 = 0 \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \end{cases} \end{cases}$

S_f: $x \in \{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\}$

Exp 3: $x^4 - 12x^3 + 27x^2 = 0$

E_1) $x^2(x^2 - 12x + 27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \text{sau} \\ x^2 - 12x + 27 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 9 \end{cases}$

S_f: $x \in \{0; 3; 9\}$

INECUAȚII DE GR I și GR II

INECUAȚII DUBLE DE GRADUL I

E_1) se înmulțește cu numitorul

E_2) se ține cont de faptul că, prin înmulțire cu nr. pozitiv se păstrează semnul, prin înmulțire cu negativ se schimbă semnul inegalității

E_3) se obține un interval, se aleg soluțiile cerute

INECUAȚII DE GR I REZOLVATE CU TABEL DE SEMNE

E_1) se rezolvă $ax+b=0$

E_2) se folosește regula din tabelul

x		$x_1=-b/a$	
$ax+b$	$-$ semn a	0	semn a

E_3) se alege intervalul cerut

INECUAȚII DE GR II REZOLVATE CU TABEL DE SEMNE

E_1) se rezolvă, dacă e posibil, ecuația $ax^2+bx+c=0$

E_2) în funcție de semnul lui Δ, se alege linia corespunzătoare din tabelul

x		x_1		$x_1=x_2$		x_2	
$\Delta>0$	semn a	0	$-$ semn a	0	semn a		
$\Delta=0$	semn a			0	semn a		
$\Delta<0$	semn a						

E_3) se alege intervalul cerut

Obs.: deși inecuațiile de gr I se rezolvă mult mai simplu fără tabel de semne, rolul acestor pb este să înțelegem tabelul de semne pentru mai târziu

---

Exp 1: $2 \le \frac{3x+1}{2} < 3$ în $\mathbb{Z}$

E_1) $2 \le \frac{3x+1}{2} < 3 \mid \cdot 2$

$4 \le 3x+1 < 6 \mid -1$

$3 \le 3x < 5 \mid : 3$

$1 \le x < \frac{5}{3}$

$\Rightarrow x \in [1, \frac{5}{3})$

E_2) Dar, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [1, \frac{5}{3}) \cap \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 1$

Exp 2: Cu tabelul de semne, rezolvați: a) $2x-1<0$

b) $x^2-3x+2 \ge 0$

a) $2x-1<0$, ec. atașată este $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x		$1/2$	
$2x-1$	$-----$	0	$++++$

$\Rightarrow$ $2x-1<0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1/2)$

b) $x^2-3x+2 \ge 0 \Rightarrow$ ec. atașată este $x^2-3x+2=0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

x		1		2	
x^2-3x+2	$+++$	0	$---$	0	$++$

$\Rightarrow$ $x^2-3x+2 \ge 0 \Rightarrow$

$x \in (-\infty; 1] \cup [2, \infty)$

INECUAȚII DE GR I ȘI DE GR II REZOLVATE CU TABEL DE SEMNE

(N1)

INECUAȚII DE GR I, $ax+b$

E_1) se rezolvă ec. $ax+b=0$

E_2) se folosește regula din tabelul

x		$-b/a$	
$ax+b$	$-\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} a$

INECUAȚII DE GR II, ax^2+bx+c

E_1) se rezolvă, dacă e posibil ecuația

E_2) în funcție de semnul lui Δ, se alege linia corespunzătoare din tabelul

x		x_1		$x_1=x_2$		x_2	
$\Delta>0$	$\operatorname{sgn} a$	0	$-\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} a$		
$\Delta=0$	$\operatorname{sgn} a$		0		$\operatorname{sgn} a$		
$\Delta<0$	$\operatorname{sgn} a$						

INECUAȚII CU TABEL

E_1) se trece totul în stg, se aduce la ac. numitor, se compară cu 0

E_2) se face tabel de semne, pe prima linie x, pe celelalte expresiile de gr I sau II cu semnele corespunzătoare iar pe ultima linie $E(x)$

E_3) pe linia lui $E(x)$ se folosește atât regula semnelor la înmulțire cât și că $\frac{0}{a}=0$; $\frac{a}{0}=\infty$; $\frac{a}{0}=\infty$ sau $0\cdot a=0, 0\cdot 0=0$ și $a\cdot 0=0$

E_4) se alege pentru x intervalul în care semnul lui $E(x)$ este cel care trebuie

---

Exemplu 1: $\dfrac{(x^2-3x+2)(-x+4)}{2-x}\le 0$

x		1		2		4	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$-x+4$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2-x$	$+$		$+$		0	$-$	$-$
$E(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

$x\in$ ca $E(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[1;2)\cup(2;4]$

Exemplu 2: $\dfrac{16x-8}{x^2+3x+2}\ge 2$

E_1) $\dfrac{16x-8}{x^2+3x+2} \overset{x^2+3x+2}{-2}\ge 0$

$$\frac{16x-8-2x^2-6x-4}{x^2+3x+2}\ge 0$$

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x^2-3x+2}\ge 0$$

E_2) $-2x^2+10x-12=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{4}}{-4}$ $\begin{matrix}x_1=3\\ x_2=2\end{matrix}$

$x^2+3x+2=0$ $\begin{matrix}x_1=-1\\ x_2=-2\end{matrix}$

E_3)

x		-2		-1		2		3	
$-2x^2+10x+12$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$E(x)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x\in$ ca $E(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-2;-1)\cup[2;3]$

Exemplu 3: $1\le \dfrac{x}{x-3}$

E_1) $1-\dfrac{x}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3-x}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{x-3}\le 0$

E_2)

x		3	
-3	$-$		$-$
$x-3$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$+$	$\|$	$-$

E_3) $x\in$ ca $E(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(3;\infty)$

Exemplu 4: $(x^2-3x+2)(x-4)\le 0$

x		1		2		4	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$E(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x\in$ ca $E(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[2;4]$

CONDIȚIA CA O EXPRESIE DE GRAD II SĂ PĂSTREZE SEMN CONSTANT PE $\mathbb{R}$

- se cere $m=?$ dacă $ax^2+bx+c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (sau orice altă inegalitate, dar important e că apare $\forall x \in \mathbb{R}$.
- avem 2 condiții:
  - $a>0$ dacă $f(x)>0$ sau $f(x)\geq 0$ și $a<0$ și $f(x)<0$ sau $f(x)\leq 0$
  - $\Delta<0$ dacă inegalitatea e strictă (indiferent că $f(x)>0$ sau că $f(x)<0$) și $\Delta\leq 0$ dacă inegalitatea nu e strictă (adică $f(x)\geq 0$ sau $f(x)\leq 0$)

a) $ax^2+bx+c>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

b) $ax^2+bx+c\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

c) $ax^2+bx+c<0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

d) $ax^2+bx+c\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

Exp 1: $m=?$ dacă $(m-3)x^2-mx-m<0, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ Cond: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

$E_2)$ $a<0 \Rightarrow m-3<0 \Rightarrow m\in(-\infty;3)=I_1$

$E_3)$ $\Delta<0 \Rightarrow (-m)^2-4(m-3)(-m)<0 \Rightarrow$

$m^2+4m^2-12m<0 \Rightarrow 5m^2-12m<0$

$E_4)$ $5m^2-12m=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1=0 \\ m_2=\frac{12}{5} \end{cases}$

$E_5)$ facem tabel de semne

m		0		$12/5$	
$5m^2-12m$	$+$	0	$-$	0	$+$

$E_6)$ $5m^2-12m<0 \Rightarrow m\in(0;12/5)=I_2$

$E_7)$ $I_c=I_1\cap I_2=(0;12/5)$

Exp 2: $m=?$ dacă $x^2+mx+1\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ Cond: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

$E_2)$ $a>0 \Rightarrow 1>0$ adev., $\forall m\in\mathbb{R}=I_1$

$E_3)$ $\Delta\leq 0 \Rightarrow m^2-4\leq 0$, $m^2-4=0 \Rightarrow m=\pm 2$

$E_4)$

m		-2		2	
m^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$E_5)$ $m^2-4\leq 0 \Rightarrow m\in[-2;2]=I_2$

$E_6)$ $I_c=I_1\cap I_2=[-2;2]$

Exp 3: $m=?$ dacă inecuația $mx^2+x-2>0$ nu are nicio soluție reală

$E_1)$ $mx^2+x-2>0$ nu are nicio soluție reală $\Rightarrow mx^2+x-2\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_2)$ Cond.: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

$E_3)$ $a<0 \Rightarrow m<0 \Rightarrow m\in(-\infty;0)=I_1$

$E_4)$ $\Delta\leq 0 \Rightarrow 1-4m\cdot(-2)\leq 0 \Rightarrow$

$8m+1\leq 0 \Rightarrow m\leq -\frac{1}{8} \Rightarrow m\in(-\infty;-\frac{1}{8}]=I_2$

$E_5)$ $I_c=I_1\cap I_2=(-\infty;-\frac{1}{8}]$

ECUAȚII CU MODULE

E_1) se egalează cantitatea din fiecare modul cu zero, se rezolvă

E_2) se face tabel de semne

E_3) se rezolvă ecuația în fiecare caz, se alege doar soluția care este în cazul respectiv $\Rightarrow S_I, S_{II}, S_{III}, \dots$

E_4) soluția finală este $S_f = S_I \cup S_{II} \cup \dots$

Exp. 1: Rezolvați $|5-x| - |3-x| = x+6$

E_1) $5-x=0 \Rightarrow x=5$

$3-x=0 \Rightarrow x=3$

E_2)

x		3		5	
$5-x$	$+++$	$+$	$+-+$	0	$---$
$3-x$	$+++$	0	$---$		$---$

E_3) Caz I: $x \in (-\infty; 3]$

$\Rightarrow (5-x)-(3-x) = x+6 \Rightarrow 5-x-3+x = x+6$

$\Rightarrow 2 = x+6 \Rightarrow x = -4 \in (-\infty; 3] \Rightarrow S_I = \{-4\}$

Caz II: $x \in (3; 5]$

$\Rightarrow (5-x)-(3-x) = x+6 \Rightarrow 8-2x = x+6 \Rightarrow -3x = -2$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \in (3; 5] \Rightarrow S_{II} = \{\frac{2}{3}\}$

Caz III: $x \in (5, \infty)$

$\Rightarrow -(5-x)+(3-x) = x+6 \Rightarrow -5+x+3-x = x+6$

$\Rightarrow -2 = x+6 \Rightarrow x = -8 \notin (5; \infty) \Rightarrow S_{III} = \emptyset$

E_4) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} = \{-4; \frac{2}{3}\}$

INECUAȚII CU MODULE

E_1) se egalează cantitatea din fiecare modul cu zero, se rezolvă

E_2) se face tabel de semne

E_3) se rezolvă inecuația în fiecare caz, se aleg doar valorile care sunt în intervalul respectiv, adică intersectăm ce am obținut din rezolvare cu cazul respectiv

E_4) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup \dots$

Exemplu: $|x+2| + |x+3| \leq 2x+7$

E_1) $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

E_2)

x		-3		-2	
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$ $+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$ $+$ $+$

E_3) Caz I: $x \in (-\infty, -3] \Rightarrow$

$-(x+2)-(x+3) \leq 2x+7 \Rightarrow$

$-x-2-x-3 \leq 2x+7$

$\Rightarrow -4x \leq 12 \mid :(-4) \Rightarrow x \geq -\frac{12}{4} = -3$

$\Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, \infty)$

$S_I = [-3, \infty) \cap (-\infty, -3] = \{-3\}$

E_4) Caz II: $x \in (-3, -2] \Rightarrow$

$-(x+2)+(x+3) \leq 2x+7 \Rightarrow$

$-x-2+x+3 \leq 2x+7$

$\Rightarrow -2x \leq 8 \mid :(-2) \Rightarrow x \geq -4$

$\Rightarrow x \in [-4, \infty)$

$S_{II} = [-4, \infty) \cap (-3, -2] = (-3, -2]$

Caz III: $x \in (-2, \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)+(x+3) \leq 2x+7$

$\Rightarrow 2x+5 \leq 2x+7 \Rightarrow 5 \leq 7$ adev. pt

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$S_{III} = \mathbb{R} \cap (-2, \infty) = (-2, \infty)$

E_5) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} = [-3, \infty)$

Exemplu: $|-x+2| - |x+3| > 2x+3$

E_1) $-x+2=0 \Rightarrow x=2$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

E_2)

x		-3		2	
$-x+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$ $-$ $-$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$ $+$ $+$

E_3) Caz I: $x \in (-\infty, -3] \Rightarrow$

$(-x+2)+(x+3) > 2x+3$

$5 > 2x+3 \Rightarrow -2x > -2 \mid :(-2)$

$\Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

$S_I = (-\infty, 1) \cap (-\infty, -3] = (-\infty, -3]$

E_4) Caz II: $x \in (-3, 2] \Rightarrow$

$(-x+2)-(x+3) > 2x+3$

$-2x-1 > 2x+3 \Rightarrow -4x > 4 \mid :(-4)$

$\Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

$S_{II} = (-\infty, 1) \cap (-3, 2] = (-3, 1)$

E_5) Caz III: $x \in (2, \infty) \Rightarrow$

$-(-x+2)-(x+3) > 2x+3$

$x-2-x-3 > 2x+3$

$-2x > 8 \mid :(-2) \Rightarrow x < -4$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -4)$

$S_{III} = (-\infty, -4) \cap (2, \infty) = \emptyset$

E_6) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$

$\Rightarrow S_f = (-\infty, 1)$

SUMA PUTERILOR PRIMELOR (N1)
n NUMERE NATURALE

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Obs: $\sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k$

Ex1: Calculați $\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2)$

$$E_1)\ S = 2\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= n(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = n(n+1)\left[1+\frac{2n+1}{2}\right]$$

PROGRESII ARITMETICE (N1)

1) Fiecare termen se obține din precedentul adunând același număr notat r (rația)

2) termen general: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$

3) condiția ca trei numere să fie term. consecutivi ai unei p.a.:
$a+c=b+b \Leftrightarrow \boxed{a+c=2b}$

4) cond. ca un șir să fie p.a.:
$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

5) suma p.a. $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$

6) găsirea term general din sumă
$a_n = S_n - S_{n-1}$

7) cond. ca o sumă să fie sumă de p.a.: E1) $a_n = S_n - S_{n-1}$
E2) $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

Exp 1: Se cere a_7 dacă $a_5 = 12$, $a_{19} = 40$

E1) $a_5 = 12 \Rightarrow a_1 + 4r = 12$
$a_{19} = 40 \Rightarrow a_1 + 18r = 40$

E2) scădem $\Rightarrow -14r = -28 \Rightarrow r = 2$

E3) înlocuim în $a_1 + 4r = 12 \Rightarrow a_1 = 4$

E4) $a_7 = a_1 + 6r = 4 + 6\cdot 2 = 16$

Exp 2: $x = ?$ dacă $2+x$, 3 și $x+6$ sunt termeni consecutivi ai p.a.

$(2+x) + (x+6) = 2\cdot 3 \Leftrightarrow 2x + 8 = 6$
$\Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

Exp 3: verificați dacă $a_n = 2n+3$ este progr aritm

E1) Studiem dacă $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

E2) $a_{n-1} = 2(n-1)+3 = 2n+1$
$a_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+5$

E3) $a_{n-1} + a_{n+1} = (2n+1)+(2n+5) = 4n+6$
$2a_n = 2(2n+3) = 4n+6$
$\Rightarrow a_n$ p.a.

Exp 4: Calculați S_7 dacă $a_n = 2n+1$ este p.a.

E1) $S_7 = \frac{(a_1+a_7)\cdot 7}{2}$
$r = 2$; $a_7 = 2\cdot 7 + 1 = 15$

E3) $S_7 = \frac{(3+15)\cdot 7}{2} = 9\cdot 7 = 63$

Exp 5: Rezolvați: $1+5+9+\dots+x = 231$

E1) obs. că e sumă de p.a. cu $a_1 = 1$, $a_n = x$ și $r = 4 \Rightarrow S_n = \frac{(1+x)\cdot n}{2}$

E2) $x = a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1)\cdot 4$
$\Rightarrow x = 4n - 3 \Rightarrow S_n = \frac{(1+4n-3)\cdot n}{2}$

E3) ec. devine:
$\frac{(4n-2)n}{2} = 231 \Rightarrow (2n-1)n = 231$
$\Leftrightarrow 2n^2 - n - 231 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1849}}{4}$
$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm 43}{4}$ $\swarrow^{11}$ $-\frac{42}{4} \notin \mathbb{N}$ $\Rightarrow n = 11$

E4) $x = 4n - 3 = 41$

Exp 6: Calculați $S = 1+4+7+\dots+100$

E1) S sumă p.a. cu $a_1 = 1$, $a_n = 100$, $r = 3$

E2) $a_n = 100 = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 100 = 1 + 3(n-1)$
$\Rightarrow n = 34 \Rightarrow S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = \frac{(1+100)34}{2}$
$\Rightarrow S_n = 1717$

Exp 7: Studiați dacă $S_n = n^2 + n$ este sumă de p.a.

E1) $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - ((n-1)^2 + (n-1))$
$= n^2 + n - (n^2 - 2n + 1 + n - 1) = 2n$

E2) Studiem dacă $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$
$\Leftrightarrow 2(n-1) + 2(n+1) = 2\cdot 2n \Leftrightarrow$
$4n = 4n$ adev $\Rightarrow a_n$ p.a. $\Rightarrow$
S_n e sumă de p.a.

PROGRESII GEOMETRICE

1) fiecare termen se obține din precedentul înmulțind cu același număr nenul, notat cu q (rația)

2) termen general: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

3) condiția ca trei numere să fie term consecutivi ai unei progresii geometrice:

$a \cdot c = b \cdot b \Leftrightarrow \boxed{a \cdot c = b^2}$

4) cond. ca un șir să fie p. g.

$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

5) suma p. g. $\boxed{S_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, & q \neq 1 \\ n \cdot b_1, & q = 1 \end{cases}}$

6) găsirea term general din suma p. g.: $E_1)\ b_n = S_n - S_{n-1}$

$E_2)\ b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

Exp 1.: Se cere b_7 dacă $b_2 = 5$ și $b_5 = 40$

$E_1)\ b_2 = 5 \Rightarrow b_1 \cdot q = 5$

$b_5 = 40 \Rightarrow b_1 \cdot q^4 = 40$

$E_2)$ împărțim $\Rightarrow \frac{b_1 q}{b_1 q^4} = \frac{5}{40} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

$E_3)$ înlocuim în $b_1 q = 5 \Rightarrow b_1 = \frac{5}{2}$

$E_4)\ b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{5}{2} \cdot 2^6 = 5 \cdot 2^5 = 160$

Exp 2: Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă x, 6 și $x-5$ sunt term. consec. p. g.

$E_1)\ x \cdot (x-5) = 6^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2}$ $\begin{matrix} x_1 = 9 \\ x_2 = -4 \end{matrix}$

Exp 3.: Verificați dacă șirul $b_n = 2 \cdot 3^{n+1}$ este p. g.

$E_1)$ studiem dacă $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

$E_2)\ b_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1+1} = 2 \cdot 3^n$

$b_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1+1} = 2 \cdot 3^{n+2}$

$E_3)\ b_{n-1} \cdot b_{n+1} = 2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 3^{n+2} = 4 \cdot 3^{2n+2}$

$(b_n)^2 = (2 \cdot 3^{n+1})^2 = 4 \cdot 3^{2n+2} \Rightarrow b_n$ p. g.

Exp 4.: Arătați că $S \in (1;2)$ unde $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2017}}$

$E_1)$ obs. că e sumă de p. g. cu $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ și sunt 2018 termeni

$E_2)\ S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2018} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

$\Rightarrow S_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2018} - 1}{-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2018}\right) =$

$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017} \in (1;2)$

Exp 5: verificați dacă $S_n = n^2 + n$ este suma unei p. g.

$E_1)\ b_n = S_n - S_{n-1} = (n^2+n) - ((n-1)^2 + (n-1)) =$

$= n^2 + n - (n^2 - 2n + 1 + n - 1) = 2n$

$E_2)$ studiem dacă $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

$E_3)\ b_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1)$ și $b_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)$

și înlocuind $\Rightarrow$

$((n-1)^2 + (n-1))((n+1)^2 + (n+1)) = [n^2+n]^2$

$\Leftrightarrow (n^2-n)(n^2+3n+2) = n^4 + 2n^3 + n^2$

$\Leftrightarrow n^4 + 3n^3 + 2n^2 - n^3 - 3n^2 - 2n =$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

$\Leftrightarrow -n^2 - 2n = n^2 \Leftrightarrow -2n^2 - 2n = 0$

Fals (ar trebui să fie adev., $\forall n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow b_n$ nu e p. g $\Rightarrow S_n$ nu este sumă de p. g.

CONDIȚII PENTRU ECUAȚIA DE GRADUL II

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Dacă $\Delta<0 \Rightarrow$ ec. nu are rădăcini reale

Obs1: Dacă se cere condiția ca o ecuație să aibă rădăcini reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Obs2: Dacă se cere condiția ca o ecuație să aibă rădăcini reale distincte: $\Delta>0$

Obs3: Dacă se cere condiția ca o ecuație să aibă rădăcini reale egale: $\Delta=0$

Exp: $x^2-2x+m=0$

$m=?$ a.î. ec. are 2 rădăcini reale distincte

$\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2)^2-4\cdot 1\cdot m>0$

$4-4m>0 \Rightarrow -4m>-4 \mid :(-1)$

$\dots \in (-\infty, 1)$

RELAȚIILE LUI VIETE PT ECUAȚIA DE GRAD II

(N1)

Fie ecuația

$ax^2+bx+c=0$

au loc $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

dem:

$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow S=\frac{-2b}{2a} \Rightarrow S=-\frac{b}{a}$

$P=x_1x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=$

$=\frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=$

$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \Rightarrow P=\frac{c}{a}$

Ex1: $m=?$ dacă rad. ec.

$x^2-(2m+1)x+3m=0$

verifică: $x_1+x_2+x_1x_2=1$

$E_1)$ $x_1+x_2+x_1x_2=11 \Rightarrow S+P=\dots$

$E_2)$ $S=-\frac{b}{a}=\frac{2m+1}{1}=2m+1$

$P=\frac{c}{a}=\frac{3m}{1}=3m$

$E_3)$ $S+P=11 \Rightarrow 2m+1+3m=11$

$\Rightarrow 5m=10 \Rightarrow m=2$

Ex2: $m=?$ dacă $x_1-4x_2+x_1x_2=1$

pt ec $(m-2)x^2+x+m-1=0$

$E_1)$ $x_1-4x_2+x_1x_2=11 \Rightarrow$

$x_1+x_2+x_1x_2-5x_2=1$

$\Rightarrow S+P-5x_2=1$

$E_2)$ $S=-\frac{1}{m-2}$, $P=\frac{m-1}{m-2}$

$E_3)$ înlocuim $\Rightarrow$

$-\frac{1}{m-2}+\frac{m-1}{m-2}-5x_2=1 \Rightarrow$

$\frac{-1+m-1}{m-2}-5x_2=1 \Rightarrow 1-5x_2=1$

$\Rightarrow x_2=0$

$E_4)$ Dacă $x_2=0$ e rădăc $\Rightarrow$

$x_2=0$ verifică ec $\Rightarrow$

$0-(2m+1)\cdot 0+3m=0$

$\Rightarrow \boxed{m=0}$

DESCOMPUNEREA POLINOMULUI DE GRAD II ÎN FACTORI

$ax^2+bx+c \xrightarrow{\Delta>0} a(x-x_1)(x-x_2)$

$ax^2+bx+c \xrightarrow{\Delta=0} a(x-x_1)^2$

$ax^2+bx+c \xrightarrow{\Delta<0}$ ireductibil (nu se poate descompune) în $\mathbb{R}$

Exp 1: descompuneți $f=3x^2-2x-1$

$E_1)\ 3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2\cdot 3}=\frac{2\pm 4}{6}\begin{matrix}-\frac{1}{3}\\ 1\end{matrix}$

$E_2)\ f=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1) \Rightarrow f=(3x+1)(x-1)$

Exp 2: descompuneți $f=-4x^2+4x-1$

$E_1)\ -4x^2+4x-1=0 \mid\cdot(-1) \Rightarrow 4x^2-4x+1=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2\cdot 4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$E_2)\ \Delta=0 \Rightarrow f=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

Exp 3: descompuneți $f=x^2+3x+4$

$E_1)\ x^2+3x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}$ și $\Delta=-7<0$

$\Rightarrow f$ ireductibil

SUMA PUTERILOR ASEMENEA (N1)

PENTRU EC. DE GR II

(FĂRĂ A REZOLVA EC)

Dt $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$ $\boxed{x_1^2+x_2^2=S^2-2P}$

$\boxed{x_1^3+x_2^3=S^3-3PS}$

Cu (*) (adică de nivel 1) apar și

$\boxed{x_1^4+x_2^4=(S^2-2P)^2-2P^2}$ și

$\boxed{|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}}$

Ex.: Dt $x^2-3x+1=0$, se cere

a) $x_1^2+x_2^2$ b) $x_1^3+x_2^3$ c) $x_1^4+x_2^4$ d) $|x_1-x_2|$

E1) $S=-\frac{b}{a}=3$, $P=\frac{c}{a}=1$

E2) a) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P=9-2=7$

b) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS=27-3\cdot3\cdot1=27-9=18$

c) $x_1^4+x_2^4=(S^2-2P)^2-2P^2=(9-2)^2-2\cdot1=49-2=47$

d) $|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Obs.: dacă nu se reține, formulele se demonstrează:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

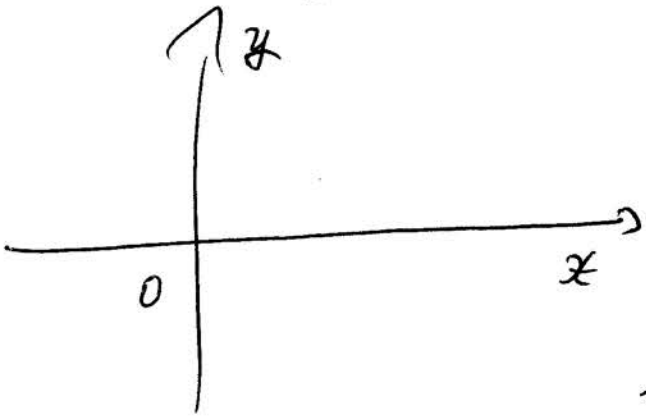
$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3PS$

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=(S^2-2P)^2-2P^2$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}=\sqrt{S^2-2P-2P}=\sqrt{S^2-4P}$

SISTEMUL DE AXE CARTEZIAN, SEMNELE CASANELOR

(N1)

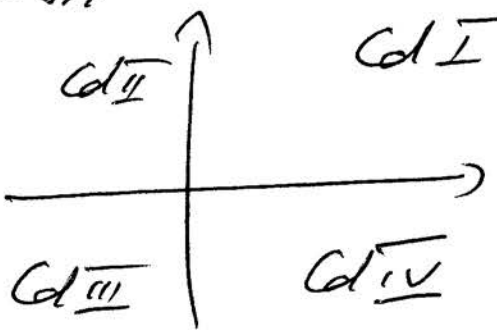


1) Ox este axa absciselor
Oy este axa ordonatelor

2) Dacă $M(x_M, y_M) \Rightarrow$
abscisa lui M este x_M,
ordonata lui M este y_M

3) Dacă $M(x_M, y_M) \in Oy \Rightarrow x_M = 0$
Dacă $M(x_M, y_M) \in Ox \Rightarrow y_M = 0$

4) Există 4 cadrane



5) $M(x_M, y_M) \in Cd\,I \Leftrightarrow \begin{cases} x_M > 0 \\ y_M > 0 \end{cases}$

$M(x_M, y_M) \in Cd\,II \Leftrightarrow \begin{cases} x_M < 0 \\ y_M > 0 \end{cases}$

$M(x_M, y_M) \in Cd\,III \Leftrightarrow \begin{cases} x_M < 0 \\ y_M < 0 \end{cases}$

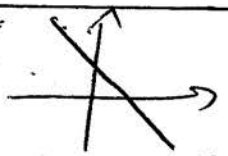
$M(x_M, y_M) \in Cd\,IV \Leftrightarrow \begin{cases} x_M > 0 \\ y_M < 0 \end{cases}$

GRAFICUL, MONOTONIA FUNCȚIEI DE GRADUL I

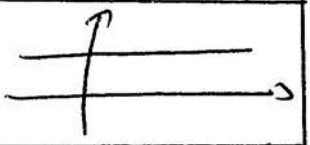
1) f are forma $f(x)=ax+b$

2) graficul funcției este o dreaptă și are forma

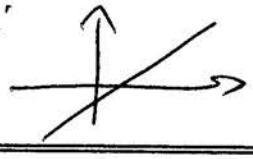
dacă $a<0$ atunci $\Rightarrow f\searrow$



dacă $a=0$ atunci $\Rightarrow f$ constantă



dacă $a>0$ atunci $\Rightarrow f\nearrow$



3) graficul se trasează calculând punctele de $\cap$ cu axele:

$\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=\ldots \Rightarrow A(0,\ldots)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x_{1,2} \Rightarrow B\ldots \in G_f$

Obs 1: pt trasarea graficului se pot lua orice alte două puncte, apoi se unesc

Obs 2: dacă D_f e interval $\neq \mathbb{R}$ $\Rightarrow G_f$ semidreaptă sau segment de dreaptă

Ex 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$

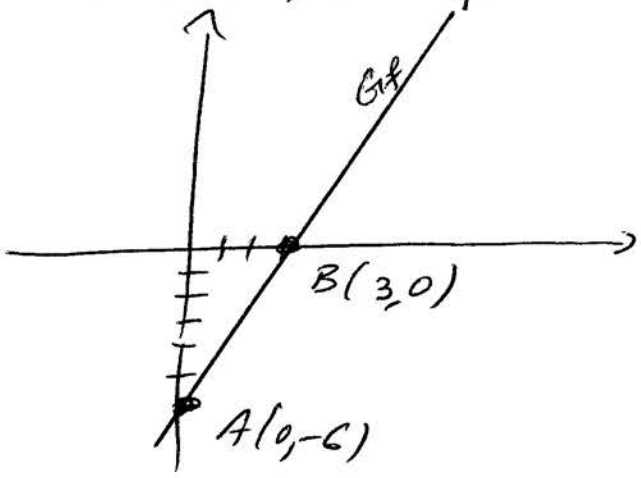
Se cere G_f

E_1) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=-6 \Rightarrow A(0,-6)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0$

$\Rightarrow x=3 \Rightarrow B(3,0)\in G_f$

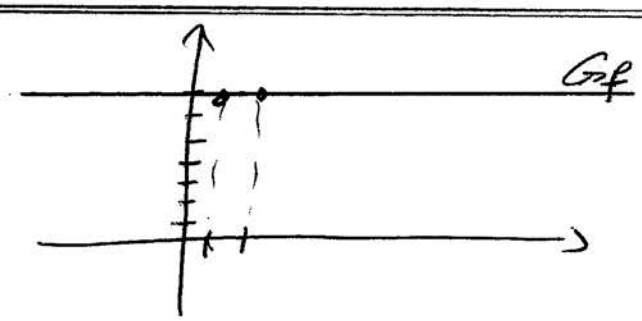
E_2)



Ex 2: $f(x)=7$, se cere G_f

$x=1 \Rightarrow f(1)=7 \Rightarrow A(1,7)\in G_f$

$x=2 \Rightarrow f(2)=7 \Rightarrow B(2,7)\in G_f$



Ex 3: $m=?$, $m\in\mathbb{R}$ dacă $f\nearrow$ unde $f(x)=(m-3)x+m-4$

E_1) $f(x)=ax+b$ e $\nearrow \Rightarrow a>0$

E_2) $m-3>0 \Rightarrow m\in(3,\infty)$

Ex 4: $m=?$ dacă $f(x)=(m-2)x+m-4$ e constantă

E) $f(x)=ax+b$ constantă $\Leftrightarrow a=0$

E_1) În cazul nostru.

$m-2=0 \Rightarrow m=2$

VÂRFUL FUNCȚIEI DE GR II. MAXIMUL SAU MINIMUL FCȚ DE GR II

Pt $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$
$\Rightarrow \exists$ vârf $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ și
dacă $a>0 \Rightarrow G_f \cup$
dacă $a<0 \Rightarrow G_f \cap$

Pt $a>0 \Rightarrow G_f \cup \Rightarrow f$ are MINIM egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, se obț. pt $x=-\frac{b}{2a}$

Pt $a<0 \Rightarrow G_f \cap \Rightarrow f$ are MAXIM egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, se obț pt $x=-\frac{b}{2a}$

Ex 1.: $m=?$ dacă vârful parabolei $f(x)=x^2-mx+9$ este în Cd IV

$E_1) V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \in$ Cd IV
$\Rightarrow \begin{cases} x_V>0 \\ y_V<0 \end{cases}$

$E_2) x_V>0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{m}{2}>0$
$\Rightarrow m\in(0;\infty)=I_1$

$E_3) y_V<0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}<0 \Rightarrow$
$-\frac{m^2-36}{4}<0 \Rightarrow m^2-36>0$
tabel $\Rightarrow m\in(-\infty;-6)\cup(6;\infty)=I_2$

$E_4) m\in I_1\cap I_2 \Rightarrow$
$m\in(6;\infty)$

Ex 2: $m=?$ dacă f_m are un maxim egal cu 5 unde $f_m(x)=(m+1)x^2-x+4$

$E_1)$ f are maxim egal cu $5 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a<0 \Rightarrow m+1<0 \Rightarrow m\in(-\infty;-1) \\ -\frac{\Delta}{4a}=5 \Rightarrow -\frac{1-16(m+1)}{4(m+1)}=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1+16m+16=20m+20$
$\Leftrightarrow 4m=-5 \Rightarrow m=-\frac{5}{4}\in(-\infty;-1)$
$\Rightarrow \boxed{m=-\frac{5}{4}}$ e ok.

Ex 3: $m=?$ dacă f_m are un minim egal cu 2 pt $f_m(x)=mx^2+x-1$

$E_1)$ f are minim egal cu 2
$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow m>0 \\ -\frac{\Delta}{4a}=2 \Rightarrow -\frac{1+4m}{4m}=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1-4m=8m \Leftrightarrow 12m=-1$
$\Rightarrow m=-\frac{1}{12}\notin(0;\infty)$
$\Rightarrow \nexists m$ pt care f_m are minim egal cu 2

MONOTONIA FUNCȚIEI DE GRADUL II

E_1) pt $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, forma graficului depinde de semnul lui a

E_2) $a>0 \Rightarrow$

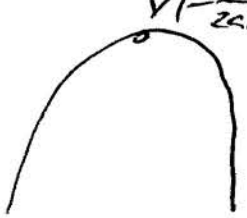


$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow f_S \searrow$ pe $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ se ia interval închis în ambele părți

$f_S \nearrow$ pe $\left[-\frac{b}{2a};\infty\right)$

E_3) $a<0 \Rightarrow$



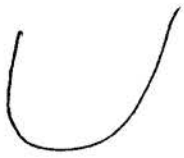
$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow f_S \nearrow$ pe $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$

$f_S \searrow$ pe $\left[-\frac{b}{2a};\infty\right)$

E_4) monotonia se deduce din faptul că mergând cu creionul pe grafic de la stânga la dreapta, graficul urcă sau coboară

Exp 1: Studiați monotonia lui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-12x+5$

E_1) $a>0 \Rightarrow$ G are forma 

E_2) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{6}=2$

E_3) $f_S \searrow$ pe $(-\infty;2]$ și $f_S \nearrow$ pe $[2;\infty)$

Exp 2: Studiați monotonia lui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+6x-3$

E_1) $a=-2<0 \Rightarrow$ G are forma 

E_2) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{-4}=\frac{3}{2}$

E_3) $f_S \searrow$ pe $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$

$f_S \nearrow$ pe $\left[\frac{3}{2};\infty\right)$

CONDIȚII PENTRU GRAFICUL UNEI FUNCȚII DE GRAD II

I G_f tangent la Ox (intersectează Ox într-un singur punct) $\Leftrightarrow \Delta = 0$

II G_f nu intersectează $Ox \Leftrightarrow \Delta < 0$

III G_f intersectează Ox în 2 pct distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$

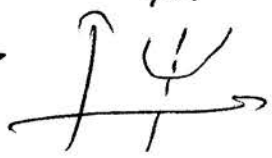
IV f convexă $\Leftrightarrow G_f \cup \Leftrightarrow a > 0$

f concavă $\Leftrightarrow G_f \cap \Leftrightarrow a < 0$

V G_f are vârful pe $Oy \Leftrightarrow x_V = 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$

VI G_f are vârful pe $Ox \Leftrightarrow y_V = 0 \Leftrightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$

VII axa de simetrie pt $G_f \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$



VIII G_f deasupra de Ox $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

G_f sub axa Ox $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

G_f strict deasupra de Ox $\Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

G_f strict sub axa Ox $\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

CONDIȚII DE INTERSECȚIE A DOUĂ GRAFICE (SAU A DOUĂ FIGURI)

– se notează atât $f(x)=y$ cât și $g(x)=y$ și se rezolvă sistemul format din ecuațiile lor
Graficele sunt:

a) tangente $\Leftrightarrow$ sistemul are soluție unică
b) secante $\Leftrightarrow$ sistemul are două sau mai multe soluții
c) nu se intersectează $\Leftrightarrow$ sistemul nu are soluție

---

Exp 1: $m=?$ dacă G_f și G_g tangente unde $f(x)=2x^2+4x+3$ și $g(x)=x^2+mx+2$, se cere punctul comun

$E_1)\begin{cases} y=2x^2+4x+3 \\ y=x^2+mx+2 \end{cases}$ are sol unică $\Leftrightarrow 2x^2+4x+3=x^2+mx+2$ are sol unică

$\Leftrightarrow x^2+(4-m)x+1=0$ are sol unică $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow$

$(4-m)^2-4\cdot1\cdot1=0 \Leftrightarrow 16-8m+m^2-4=0 \Leftrightarrow m^2-8m+12=0$

$\Leftrightarrow m_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2\cdot1}=\frac{8\pm4}{2}\begin{matrix}\nearrow 6\\ \searrow 2\end{matrix} \Rightarrow m\in\{2;6\}$

$E_2)$ pt $m=2 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}=-1$, $f(-1)=1 \Rightarrow$
$A(-1;1)$ pct comun

pt $m=6 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x_1=x_2=1 \Rightarrow f(1)=9 \Rightarrow B(1;9)$ pct comun

Exp 2: se cere pct de intersecție dintre $2x+3y-8=0$ și $f(x)=6x-4$

$E_1)\begin{cases} 2x+3y-8=0 \\ y=6x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{8-2x}{3} \\ y=6x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8-2x}{3}=6x-4 \mid\cdot 3$

$\Leftrightarrow 8-2x=18x-12 \Leftrightarrow 20x=20 \Rightarrow x=1$, $y=6x-4 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow A(1;2)$ pct cerut

MULȚIMEA VALORILOR (IMAGINEA) UNEI FUNCȚII DE GRADUL I SAU GRAD II

(N1)

$\mathrm{Im} f$ = reuniunea tuturor intervalelor de pe linia lui f pe care f este strict monotonă

E_1) se precizează monotonia în funcție de semnul lui a

E_2) se face tabel de variație

x		
$f(x)$		

unde pe linia lui f punem săgeți de monotonie, în capete închise ale D_f calculăm $f(\text{nr})$ iar la capete deschise (inclusiv $\pm\infty$) calc. limita

Obs 1: metoda poate fi folosită doar la fct de gr I sau gr II, unde $D_f = I$ sau $D_f = \mathbb{R}$, cu observația că dacă f e fct de gr II, atunci trebuie să discutăm în funcție de poziția vârfului

Obs 2: dacă $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ atunci singura metodă este:

E_1) not $f(x) = y$ și ordonăm în fct de x

E_2) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x \geq 0 \Rightarrow y \in I \Rightarrow \mathrm{Im} f = I$

Obs 3: Dacă $\mathrm{Im} f$ interval mărginit $\Rightarrow f$ mărginită, altfel f nemărginită

Obs 4: metoda cu $\Delta \geq 0$ e OK și la $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = $ fct gr II

Exm 1: $f(x) = -2x+1$, se cere $f([1;3))$

E_1) $a = -2 < 0 \Rightarrow f \searrow$

E_2)

x	$[1$		$3)$
$f(x)$	$[-1$	$\searrow$	$-5)$

$f(1) = -2+1 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = -2 \cdot 3 + 1 = -5$

E_3) $\mathrm{Im} f = (-5;-1] \Rightarrow f$ mărginită, $\nexists \min f$, $\max f = -1$

Exm 2: $f(x) = x^2 - 6x + 4$, se cere $f([-2;5])$

E_1) $a = 1 > 0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$

E_2)

x	$[-2$		3		$5)$
$f(x)$	$[20$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-1)$

$f(-2) = 4+12+4 = 20$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = 25 - 30 + 4 = -1$

$\Delta = \ldots$, $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -5$

$\mathrm{Im} f = [-5;20] \cup [-5;-1) = [-5;20] \Rightarrow f$ mărg, $\min f = -5$, $\max f = 20$

Exm 3: $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, se cere $f((-2;1])$

E_1) $a = -1 < 0 \Rightarrow G_f \cap$

E_2)

x	$(-2$		$1]$		2
$f(x)$	$(-11$	$\nearrow$	$4]$	$\searrow$	

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = -11$; $f(1) = 4$, $x_v = -\frac{b}{2a} = 2 \notin (-2;1]$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = (-11;4] \Rightarrow f$ mărg, $\nexists \min$, $\exists \max = 4$

Exm 4: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $\mathrm{Im} f = ?$

E_1) not $f(x) = y \Rightarrow x^2 y + xy + y = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow$

$x^2(1-y) - x(1+y) + 1 - y = 0$

E_2) $x \in \mathbb{R} \to \Delta_x \geq 0 \Rightarrow (1+y)^2 - 4(1-y)(1-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2y + y^2 - 4(1 - 2y + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 3 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Rightarrow y_1 = 3$, $y_2 = 1/3$

E_3)

y		$1/3$		3
$3y^2-10y+3$	$+ + +$	0	$- - -$	$0 \quad + + +$

Pt că $3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [\frac{1}{3}; 3] \Rightarrow$

$\mathrm{Im} f = [1/3; 3] \Rightarrow f$ mărg, $\min f = \frac{1}{3}$, $\max = 3$